Correction du devoir surveillé numéro 2

Problème

1. (a) On écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + c)\,\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\,\lambda + \det(A)\,. \end{aligned}$$

(b) On prouve les deux équivalences.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ et si A a une seule valeur propre $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ telle que $A = P\lambda_0 \mathrm{I}_2 P^{-1} = \lambda_0 \mathrm{I}_2$.
Si A a deux valeurs propres distinctes complexes, alors le discriminant de l'équation caractéristique $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) \neq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$
- Si $A = \lambda_0 \mathrm{I}_2$ avec $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, il est clair que A est diagonalisable dans $\mathbf{C}$.
- Si $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) \neq 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions complexes distinctes. Donc $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ a deux valeurs propres : elle est donc diagonalisable.

(c) On prouve les deux équivalences.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et si A a une seule valeur propre $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = P\lambda_0 \mathrm{I}_2 P^{-1} = \lambda_0 \mathrm{I}_2$.
Si A a deux valeurs propres distinctes réelles, alors le discriminant de l'équation caractéristique $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$
- Si $A = \lambda_0 \mathrm{I}_2$ avec $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, il est clair que A est diagonalisable dans $\mathbf{R}$.
- Si $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes. Donc $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ a deux valeurs propres rélles : elle est donc diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

2. (a) Il suffit de poser $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Une simple récurrence donne : pour tout $p \in \mathbf{N}$, $X_p = A^p X_0$.

(c) On trouve $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$, donc A est diagonalisable car χ_A est scindé à racines simples. De simples calculs donnent

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien $A = PDP^{-1}$.

(d) Comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on en déduit que pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^p - 2^p & 2^{p+1} - 2 \times 3^p \\ 3^p - 2^p & 2^{p+1} - 3^p \end{pmatrix}.$$

(e) D'après les questions 2 (b) et 2 (d), on peut écrire :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^p - 2^p & 2^{p+1} - 2 \times 3^p \\ 3^p - 2^p & 2^{p+1} - 3^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^p - 2 \times 3^p \\ 3 \times 2^p - 3^p \end{pmatrix}.$$

3. (a) On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \mathrm{I}_3$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad J^{3n} = \mathrm{I}_3, \quad J^{3n+1} = J \quad \text{et} \quad J^{3n+2} = J^2.$$

(b) On a $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

(c) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\chi_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Sp}(J) = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$.

(d) De simples calculs donnent

$$E_1(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad E_{\mathrm{j}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{\mathrm{j}^2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix}\right).$$

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$, on a $J = PDP^{-1}$.

(e) i. On a $A(a,b,c) = a\mathrm{I}_3 + bJ + cJ^2$.

ii. Comme $J = PDP^{-1}$, on a $J^2 = PD^2P^{-1}$, il s'ensuit que

$$A(a,b,c) = a\mathrm{I}_3 + bJ + cJ^2 = aPP^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P\left(a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2\right)P^{-1}.$$

On notera que la matrice $a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2$ est diagonale, ainsi $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans une base indépendante de a, b et c.

iii. Comme $a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j} \end{pmatrix}$, ainsi $\mathrm{Sp}(A(a,b,c)) = \left\{a+b+c, a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2, a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}\right\}$.

iv. Comme A est semblable à $a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2$, on a $\det(A) = \det\left(a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2\right)$. Comme $a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2$ est diagonale, on a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2\right) \\ &= (a+b+c) \times \left(a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2\right) \times \left(a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}\right) \\ &= (a+b+c) \times (a+b\mathrm{j}-c(1+\mathrm{j})) \times (a-b(1+\mathrm{j})+c\mathrm{j}). \end{aligned}$$

(f) i. Il est facile de montrer que E contient la matrice nulle et est stable par combinaison linéaire.

ii. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{C}^3$. On a

$$A(a,b,c) = a\mathrm{I}_3 + bJ + cJ^2.$$

Ainsi, $E = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_3, J, J^2\right)$. Or, la famille $\left(\mathrm{I}_3, J, J^2\right)$ est libre, donc la famille $\left(\mathrm{I}_3, J, J^2\right)$ est une base de E. Ainsi, $\dim(E) = 3$.

4. (a) Par définition, la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$ est $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On note $e_0 = e_n$. En utilisant la linéarité de u, on a :

$$u(x_\omega) = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_{k-1} = \omega \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k-2} e_{k-1} = \omega \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k = \omega x_\omega.$$

(c) Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. Un calcul analogue au précédent montre que $u\left(\sum_{k=1}^{n} \omega^{k-\ell} e_k\right) = \omega^{\ell} \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-\ell} e_k$.

On en déduit que $\mathrm{Sp}\,(u) = \left\{\omega^{\ell},\ \ell \in [\![1, n]\!]\right\}$. En particulier, u a n valeurs propres deux à deux distinctes. Comme $\dim\left(\mathbf{C}^n\right) = n$, on en déduit que u est diagonalisable une base de vecteur propre de u est $\left(\sum_{k=1}^{n} \omega^{k-\ell} e_k,\ \ell \in [\![1, n]\!]\right)$.

(d) Comme u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\,(u) = \left\{\omega^{\ell},\ \ell \in [\![1, n]\!]\right\}$, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{C}^n$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(u) = \mathrm{diag}\left(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\right)$.

Comme $\omega^n = 1$, on a $\mathrm{diag}\left(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\right)^n = \mathrm{I}_n$, donc $u^n = \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}$.

5. (a) On a :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } U^4 = \mathrm{I}_4.$$

(b) Comme i est une racine 4ième de 1, d'après la question 4 (c), il existe $P \in \mathrm{GL}_4\,(\mathbf{C})$ telle que

$$U = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$U^2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad U^3 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{aligned} V &= a\mathrm{I}_4 + bU + cU^2 + dU^3 \\ &= P\left(a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\right) P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & a-c+\mathrm{i}\,(b-d) & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-c+\mathrm{i}\,(-b+d) & \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Une base de vecteurs propres de V est alors donnée par la matrice P et $\mathrm{Sp}\,(V) = \{a+b+c+d, a-c+\mathrm{i}\,(b-d)\,, a-b+c-d, a-c+\mathrm{i}\,(-b+d)\}$.

6. Comme χ_A est scindé dans $\mathbf{C}$, A est trigonalisable dans $\mathbf{C}$: il existe $P \in \mathrm{GL}_n\,(\mathbf{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

7.
   - Comme T est triangulaire et $\mathrm{Sp}\,(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, on en déduit que $\chi_T\,(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)$.
   - Comme A et T sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique.

8. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Comme les matrices T et I_n commutent, on en déduit que les matrices $T - \lambda_i \mathrm{I}_n$ et $T - \lambda_j \mathrm{I}_n$ commutent.

9. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On note que TE_{k+1} est égale à la $(k+1)$-ième colonne de T. Comme T est triangulaire supérieure, cette colonne est $\begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que $(T - \lambda_{k+1}\mathrm{I}_n) \in E_{k+1} \in \mathrm{Vect}\,(E_1, \ldots, E_k)$.

10. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\mathscr{P}_k$: « $M_k E_k = 0$ ».
Comme $TE_1 = \lambda E_1$, on a $M_1 E_1 = 0$, donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour tout entier compris entre 1 et $k \in [\![1, n-1]\!]$. D'après la question 9, $T - \lambda E_{k+1} \in \mathrm{Vect}\,(E_1, \ldots, E_k)$: il existe $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{C}^k$ tel que $(T - \lambda_{k+1}\mathrm{I}_n)\, E_{k+1} = a_1 E_1 + \cdots + a_k E_k$. Ainsi
$$M_{k+1}E_{k+1} = M_k\,(T - \lambda_{k+1}\mathrm{I}_n)\, E_{k+1} = M_k\,(a_1 E_1 + \cdots + a_k E_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i M_k E_i.$$
Soit $i \in [\![1, k]\!]$. D'après la question 8, on peut écrire
$$M_k E_i = \prod_{j=i+1}^{k} (T - \lambda_j \mathrm{I}_n) \times M_i E_i = 0$$
d'après l'hypothèse de récurrence.

11.
    - En utilisant le résultat de la question 10 avec $k = n$ et en remarquant que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $M_n = \prod_{j=k+1}^{n} (T - \lambda_k \mathrm{I}_n)\, M_k$, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $M_n E_k = 0$, donc $M_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (T - \lambda_j \mathrm{I}_n) = 0$.
    - Comme $A = PTP^{-1}$, soit $T = P^{-1}AP$, on a
    $$0 = \prod_{j=1}^{n} \left(P^{-1}AP - \lambda_j P^{-1}P\right) = P \prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j \mathrm{I}_n)\, P^{-1}.$$
    On en déduit que $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j \mathrm{I}_n) = 0$.

12. D'après la question 7, $\chi_A(\lambda) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$. De la question 11, on en déduit que $\chi_A(A) = 0$: le théorème de Cayley-Hamilton est prouvé.