Correction de l'interrogation 5

Exercice 1.

On calcule le polynôme caractéristique de A. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(\lambda) & = & (\lambda - 1) \times \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda - 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & = & (\lambda - 1)^3 - (\lambda - 1) \\ & = & (\lambda - 1)\left((\lambda - 1)^2 - 1\right) \\ & = & \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2). \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé et ses racines sont simples : on en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(A) & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} x + z & = 0 \\ y & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} x & = -z \\ y & = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & X = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

On en déduit que $E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X\in E_1(A) &\iff \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}x+z&=x\\y&=y\\x+y+z&=z\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x&=-y\\z&=0\end{cases}\\
&\iff X=\begin{pmatrix}-y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $E_1(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X\in E_2(A) &\iff \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}x+z&=2x\\y&=2y\\x+y+z&=2z\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x&=z\\y&=0\end{cases}\\
&\iff X=\begin{pmatrix}z\\0\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $E_2(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Si l'on pose $P=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, on en déduit la relation de passage suivante : $A=PDP^{-1}$.

Exercice 2.

1. - Il est clair que si $P\in\mathbf{R}_2[X]$, alors $u(P)\in\mathbf{R}_2[X]$.
   - Soient $(P_1,P_2)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
u(P_1+\lambda P_2) &= \left(X^2-X\right)(P_1+\lambda P_2)(1)+\left(X^2+X\right)(P_1+\lambda P_2)(-1)\\
&= \left(X^2-X\right)P_1(1)+\lambda\left(X^2-X\right)P_2(1)+\left(X^2+X\right)P_1(-1)+\lambda\left(X^2+X\right)P_2(-1)\\
&= \left(X^2-X\right)P_1(1)+\left(X^2+X\right)P_1(-1)+\lambda\left(\left(X^2-X\right)P_2(1)+\left(X^2+X\right)P_2(-1)\right)\\
&= u(P_1)+\lambda u(P_2).
\end{aligned}$$

On a montré que $u\in\mathscr{L}(\mathbf{R}_2[X])$.

2. On a :
$$u(1) = 2X^2, \quad u(X) = -2X \quad \text{et} \quad u\left(X^2\right) = 2X^2.$$
En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$, on a : $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a
$$\chi_u(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\,\lambda\,(\lambda+2).$$
Ainsi, $\operatorname{Sp}(u) = \{-2, 0, 2\}$.
On pourrait trouver les sous-espaces propres en résolvant des équations. On peut faire plus simple.
Comme -2, 0 et 2 sont les valeurs propres simples de u, on en déduit que $\dim(E_{-2}(u)) = \dim(E_0(u)) = \dim(E_2(u)) = 1$.
Or, $u(X) = -2X$, donc $E_{-2}(u) = \operatorname{Vect}(X)$. De même, en utilisant la relation $u\left(X^2\right) = 2X^2$, on a $E_2(u) = \operatorname{Vect}\left(X^2\right)$.
Pour obtenir une base de $E_0(u)$, on utilise la relation $u(1) = u\left(X^2\right)$ pour obtenir $u\left(X^2-1\right) = 0$. Ainsi, $E_0(u) = \operatorname{Vect}\left(X^2-1\right)$.

4. Comme $\dim(E_{-2}(u)) + \dim(E_0(u)) + \dim(E_2(u)) = 3 = \dim(\mathbf{K}_2[X])$, on en déduit que u est diagonalisable.
Une base de vecteurs propres est alors donnée par : $\left(X, X^2, X^2-1\right)$.