Correction de l'interrogation 6

Exercice 1.

1. L'équation caractéristique est $r^2 = r+1$. Son discriminant Δ vaut 5, ainsi les solutions de l'équation $r^2 = r+1$ sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, il existe deux réels A et B tels que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
En utilisant le fait que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a le système suivant $\begin{cases} A+B & = 0 \\ A \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + B \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & = 1 \end{cases}$.
On en déduit que $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. On en déduit que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

2. L'équation caractéristique est $r^2 = 2\sqrt{3}r - 4$. Son discriminant Δ vaut -4, ainsi les solutions de l'équation $r^2 = 2\sqrt{3}r - 4$ sont $\dfrac{2\sqrt{3}+2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$ et $\dfrac{2\sqrt{3}-2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$. Ainsi, il existe deux réels A et B tels que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 2^n \times \left(A\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right).$$
En utilisant le fait que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a le système suivant $\begin{cases} A & = 0 \\ 2A \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2B \times \dfrac{1}{2} & = 1 \end{cases}$. On en déduit que $A = 0$ et $B = 1$. On en déduit que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right).$$

Exercice 2.

1.
   - On a
$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 2 & \lambda \end{vmatrix}.$$
Pour calculer ce déterminant, on fait $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ et on utilise la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne :
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-2 & 0 \\ \lambda-1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}.$$
On fait les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3, -L_1$, ainsi
$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left(\lambda^2-4\lambda+4\right) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$
On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_1(A) &\iff AX = X \\ &\iff \begin{cases} 3x - y - z &= x \\ -x + 2y &= y \\ 3x - 2y &= z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z &= 0 \\ -x + y &= 0 \\ 3x - 2y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  On en déduit que $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, $\dim(E_1(A)) = 1$ car le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff AX = X \\ &\iff \begin{cases} 3x - y - z &= 2x \\ -x + 2y &= 2y \\ 3x - 2y &= 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ -x &= 0 \\ 3x - 2y - 2z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= -z \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  On en déduit que $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  En particulier, $\dim(E_2(A)) = 1$ car le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul.

- Comme $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 \neq 3$, on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. On raisonne par analyse-synthèse.

   - *Analyse.* On suppose qu'il existe une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbf{K}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice T. En particulier, on a les relations :

$$f(u_1) = u_1, \quad f(u_2) = 2u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = u_2 + 2u_3.$$

Ainsi, $u_1 \in E_1(f)$ et $u_2 \in E_2(f)$. D'après la question 1, on peut poser $u_1 = (1,1,1)$ et $u_2 = (0,-1,1)$.
Pour trouver u_3, on remarque que $f(u_3) - 2u_3 = u_2$, soit $(f - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^3})(u_3) = u_2$. Ainsi, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de u_3 dans la base canonique de $\mathbf{K}^3$, on a $(A - 2\mathrm{I}_3) X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or,

$$(A - 2\mathrm{I}_3) X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y - z & = 0 \\ -x & = -1 \\ 3x - 2y - 2z & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}.$$

On pose $y = 0$ et $z = 1$ de sorte que l'on pose $u_3 = (1,0,1)$.

- *Synthèse.* On vérifie facilement que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\mathbf{K}^3$, donc contenant 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, elle est une base de $\mathbf{K}^3$.
  Par construction des vecteurs u_1, u_2 et u_3 la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est T, donc les matrices A et T sont semblables.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car elle est une matrice de passage et est telle que $A = PTP^{-1}$.

3. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$. On cherche $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$ telle que $PX = Y$. On a :

$$\begin{aligned} PX = Y \quad & \iff \begin{cases} x_1 + x_3 & = y_1 \\ x_1 - x_2 & = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = y_3 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x_1 + x_3 & = y_1 \\ -x_2 - x_3 & = y_2 - y_1 \\ x_2 & = y_3 - y_1 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ & \iff \begin{cases} x_1 & = y_1 - x_3 \\ x_3 & = -x_2 + y_1 - y_2 = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 & = y_3 - y_1 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x_1 & = -y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 & = -y_1 + y_3 \\ x_3 & = 2y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}. \end{aligned}$$

On en déduit que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.