Devoir maison numéro 6

À rendre pour mardi 10 novembre

Exercice 1.

Étudier la diagonisabilité dans $\mathbf{R}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soient a, b, c, d, e et f six éléments de $\mathbf{K}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 3.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
2. En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$.

Exercice 4.

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbf{K}$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
   (c) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ associe $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{I}_n$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
   (b) En utilisant le résultat de la question 1 (c), donner les valeurs propres de f. En déduire que f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
3. Soit g l'application qui, à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ associe $g(M) = M + \mathrm{Tr}(M)\,J$ où J est une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle.
   On admet que g est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
   (a) Montrer que $g^2 - 2g + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})} = 0$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Sp}(g) \subset \{1\}$.
   (c) g est-il diagonalisable ?