Devoir maison numéro 7

À rendre pour lundi 23 novembre

Exercice 1.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par φ si pour tout $x \in F$, $\varphi(x) \in F$.

Partie 1

On considère φ l'endomorphisme de $\mathbf{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{K}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de φ.
2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{K}^3$ formée de vecteurs propres de φ.
3. Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$. Montrer que D est stable par φ.
4. Soit $P = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Montrer que P est stable par φ.

Partie 2

On considère les endomorphismes f et g de $\mathbf{K}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_g = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que les endomorphismes f et g commutent.
6. Justifier que 1 est valeur propre de f et donner une base du sous-espace propre associé.
7. Vérifier que les vecteurs propres trouvés à la question précédente sont aussi des vecteurs propres pour g.
8. Montrer que -1 est valeur propre de f et déterminer une base du sous-espace propre associé $E_{-1}(f)$.
9. Montrer que $E_{-1}(f)$ est stable par g.
10. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{K}^3$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(g)$ soient diagonales.

Exercice 2.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbf{R}^p$, on pose $C(a_1, \ldots, a_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on suppose que $p = 3$ et on pose $A = C(-2, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
   (b) Déterminer une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Dans cette question, on suppose que $p = 3$ et on pose $B = C(1, -3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de B et donner une base des sous-espaces propres de B.
   (b) Montrer que B n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, mais montrer que B est trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
   (c) Montrer que B est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On donnera une matrice de passage.
3. On revient au cas général. On pose $C = C(a_1, \ldots, a_p)$.
   (a) Montrer que le polynôme caractéristique de C vérifie

   $$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \chi_C(\lambda) = \lambda^p - a_p \lambda^{p-1} - \cdots - a_2 \lambda - a_1.$$

   Indication : On pourra développer le déterminant par rapport à la dernière colonne.
   (b) Montrer que si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\operatorname{rg}(\lambda \mathrm{I}_p - C) \geq p - 1$. En déduire que les sous-espaces propres de C sont de dimension 1.
   (c) Montrer que C est diagonalisable dans $\mathbf{R}$ si, et seulement si, χ_C est scindé à racines simples.
4. (a) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ unitaire de degré p. Montrer qu'il existe $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbf{R}^p$ unique telle que $P = \chi_C$ avec $C = C(a_1, \ldots, a_p)$.
   (b) Étant donné un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur Q pour que ce polynôme soit le polynôme caractéristique d'une matrice.

Exercice 3.

Faire l'exercice 16 de la feuille de TD du chapitre 5.