Devoir maison numéro 8

À rendre pour lundi 7 décembre

Exercice 1.

Étudier et tracer l'arc paramétré par la fonction f définie par $f(t) = (\sin(2t), \sin(3t))$.

Exercice 2.

On lance deux pièces : la pièce 1 est équilibrée et la pièce 2 truquée donne Pile avec probabilité $p \in \left]0, 1\right[$. On effectue une série de lancers comme suit : on choisit d'abord une des deux pièces au hasard et on lance celle-ci. Si l'on obtient Pile, on relance la même pièce, si l'on obtient Face, on change de pièce.

1. (a) Calculer la probabilité de ne jamais lancer la pièce 2 au cours des n premiers lancers.
   (b) Calculer, pour $n \geq 2$, la probabilité de jeter pour la première fois la pièce 2 au n-ième lancer.
2. On note u_n la probabilité de lancer la pièce 1 au n-ième lancer.
   (a) Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. (a) Quelle est la probabilité, notée r_n, d'obtenir Pile au n-ième lancer ?
   (b) Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 3.

Il y a 3 portes. Derrière l'une de ses trois portes, il y a un trésor, derrière les deux autres, il n'y a rien. Un animateur, qui sait derrière quelle porte se trouve le trésor, vous propose de choisir une de ces trois portes. Après avoir fait votre choix, il ouvre une des deux portes qui n'est ni celle que vous avez choisie, ni celle cachant le trésor.

À ce point, l'animateur vous propose : soit garder votre choix de porte, soit changer de choix. ces Quelle est la stratégie optimale (autrement dit, que faut-il faire pour augmenter ses chances de trouver le trésor : garder la même porte ou changer de porte) ?

Exercice 4.

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le num éro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y et $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 5.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Soit $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbf{E}(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.