Devoir surveillé numéro 2 type Centrale

Mercredi 25 novembre

Problème

- Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ (resp. $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels (resp. complexes). On note I_n la matrice identié de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
- Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ (ou $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$), on note $\det(A)$ son déterminant et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace qui, rappelons-le, est la somme des éléments de la diagonale.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ (ou $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$), on note $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A)$ son polynôme caractéristique.

Partie 1 : Réduction des matrices réelles d'ordre 2

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

1. (a) Montrer que $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$.
   (b) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ si, et seulement si :
   $$\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda_0 \in \mathbf{R},\ A = \lambda_0 \mathrm{I}_2.$$
   (c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ si, et seulement si :
   $$\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda_0 \in \mathbf{R},\ A = \lambda_0 \mathrm{I}_2.$$

2. **Application.**
   Soient les suites $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$ définies par :
   $$u_0 = 1,\ v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} u_{p+1} &= 4u_p - 2v_p \\ v_{p+1} &= u_p + v_p \end{cases}.$$
   On pose $X_p = \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ que l'on précisera telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $X_{p+1} = AX_p$.
   (b) Pour $p \in \mathbf{N}$, exprimer X_p en fonction de A, X_0 et p.
   (c) Prouver que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   (d) Soit $p \in \mathbf{N}$. Exprimer les coefficients de A^p en fonction de p.
   (e) En déduire une expression de u_p et v_p en fonction de p.

Partie 2 : Réduction des matrices d'ordre 3 ou 4

3. **Le cas $n = 3$.**
   On définit la matrice J par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer J^2 et J^3. Soit $k \in \mathbf{N}$. Préciser J^p en fonction de $p \in \mathbf{N}$.

(b) On note $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Calculer $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$.

(c) Déterminer le polynôme caractéristique de J, ainsi que ses valeurs propres.

(d) Déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ telle que $J = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$.

(e) Soient a, b et c trois complexes. On pose $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

  i. Exprimer $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et des matrices I_3, J et J^2.

  ii. En déduire que $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ dans une base indépendante de a, b et c.

  iii. Préciser les valeurs propres de $A(a,b,c)$.

  iv. Calculer le détermiant de $A(a,b,c)$. On donnera le résultat sous la forme d'un produit à l'aide de a, b, c et j.

(f) Soit $E = \left\{ A(a,b,c),\ (a,b,c) \in \mathbf{C}^3 \right\}$.

  i. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$.

  ii. Donner la dimension de E.

4. **Le cas $n \geq 3$ quelconque.**
Dans cette question $n \geq 3$ est quelconque. On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ défini par : $u(e_2) = e_1, u(e_3) = e_2, \ldots, u(e_n) = e_{n-1}$ et $u(e_1) = e_n$, autrement dit
$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad u(e_k) = e_{k-1} \quad \text{et} \quad u(e_1) = e_n.$$

(a) Préciser la matrice U de u dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$.

(b) Soit ω une racine n-ième de l'unité. Soit $x_\omega = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k$. Calculer $u(x_\omega)$ en fonction de x et ω.

(c) Montrer que u est diagonalisable sur $\mathbf{C}^n$ et préciser une base de vecteurs propres.

(d) Que peut-on dire de u^n ?

5. **Le cas $n = 4$ quelconque.**

(a) Expliciter U, U^2, U^3 et U^4 où la matrice U est définie à la question précédente.

(b) Pour $(a,b,c,d) \in \mathbf{C}^4$, on pose
$$V = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}.$$
Donner une base de vecteurs propres de V et préciser les valeurs propres de V en fonction des nombres complexes a, b, c, d et i.

Partie 3 : Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On note
$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0$$
son polynôme caractéristique avec $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$.

Le but de cette partie est de montrer que A annule le polynôme caractéristique, i.e.
$$A^n - a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 \mathrm{I}_n = 0.$$

6. Justifier qu'il existe une matrice $T \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ triangulaire et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$.
   On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de T. On note $E_1, \ldots, E_n$ les éléments de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, ainsi $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Justifier que $\chi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \times (\lambda - \lambda_2) \times \cdots \times (\lambda - \lambda_n)$. Montrer aussi que A et T ont le même polynôme caractéristique.
8. Vérifier que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :
$$(T - \lambda_i \mathrm{I}_n)(T - \lambda_j \mathrm{I}_n) = (T - \lambda_j \mathrm{I}_n)(T - \lambda_i \mathrm{I}_n).$$
9. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :
$$(T - \lambda_{k+1} \mathrm{I}_n) E_{k+1} \in \mathrm{Vect}(E_1, \ldots, E_k).$$
10. On pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $M_k = (T - \lambda_1 \mathrm{I}_n) \times (T - \lambda_2 \mathrm{I}_n) \times \cdots \times (T - \lambda_k \mathrm{I}_n)$. On pourra noter $M_k = \prod_{j=1}^{k} (T - \lambda_j \mathrm{I}_n)$ car les matrices du produit commutent deux à deux.
    Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $M_k E_k = 0$.
11. En déduire que $\prod_{j=1}^{n} (T - \lambda_j \mathrm{I}_n) = 0$, puis que $\prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j \mathrm{I}_n) = 0$.
12. Conclure.