Devoir surveillé numéro 2 type CCP

Mercredi 25 novembre

Exercice 1.

On dit qu'une matrice N carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}.$$

1. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On considère les vecteurs colonnes :
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
   (b) Justifier que Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que $\Delta = PDP^{-1}$.
   (c) Calculer P^{-1}.
4. (a) Établir que N est une matrice nilpotente.
   (b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.
   (c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner une expression de A^n en fonction de Δ, N et n.
   (d) Établir que pour tout $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$.
   (e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.

Problème

- Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels.
- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note M^T la transposée de M.
- On appelle vecteur colonne tout élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

- On dit qu'un vecteur colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont positifs et que la somme des coefficients vaut 1. Par exemple, $\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$ est stochastique.
- Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique si chacune de ses colonnes l'est.

Partie 1 : Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on s'intéresse aux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2},\ z_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\quad \begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{7}{10}x_n + \dfrac{2}{5}y_n + \dfrac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} &= \dfrac{3}{10}x_n + \dfrac{1}{10}z_n \\ z_{n+1} &= \dfrac{3}{5}y_n + \dfrac{2}{5}z_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 7/10 & 2/5 & 1/2 \\ 3/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $X_{n+1} = AX_n$.
2. Justifier que A est stochastique.
3. Calculer la trace et le déterminant de A. A est-elle inversible ?
4. Prouver que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^T. Quelle est la valeur propre associée ?
5. *On pourra admettre les résultats démontrés ici pour traiter la question suivante.*
   Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
   (a) Montrer que M et M^T ont le même polynôme caractéristique.
   (b) Établir que M a trois valeurs complexes (éventuellement non distinctes) que l'on note λ_1, λ_2 et λ_3 et que $\mathrm{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
6. Déduire des questions précédentes que les valeurs propres de A sont 0, $\dfrac{1}{10}$ et 1.
7. Justifier qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -2 & b \end{pmatrix}$
   avec a et b sont des réels que l'on déterminera.
8. Vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.
9. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
10. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
    (a) Exprimer X_n en fonction de n.
    (b) Montrer que le vecteur colonne X_n est stochastique.
11. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. On note leurs limites respectivement ℓ_x, ℓ_y et ℓ_z.
12. Montrer que le vecteur colonne $L = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix}$ est stochastique et est un vecteur propre de A.

Partie 2 : Cas de la dimension 2

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice stochastique.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ telle que X_0 est stochastique et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

1. Montrer qu'il existe a et b deux réels de $[0,1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le vecteur colonne X_n est stochastique (i.e. montrer que $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ et $x_n + y_n = 1$).
3. Montrer que $0 \leq \mathrm{Tr}\,(A) \leq 2$.
4. (a) Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$.
   Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut A^2 ? Que se passe-t-il pour la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$?
   (b) Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$.
   Que vaut A ? Que se passe-t-il pour la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

On suppose dans toute la suite que $0 < \mathrm{Tr}\,(A) < 2$. On pose aussi $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que $-1 < a - b < 1$.
6. (a) Montrer que V est un vecteur propre de A. Exprimer la valeur propre associée que l'on note q en fonction de a et b.
   (b) Montrer que $|q| < 1$.
7. Montrer que 1 est une valeur propre de A.
8. Prouver que A est diagonalisable.
9. *On pourra admettre le résultat de cette question pour traiter la suite.*
   Établir qu'il existe un vecteur colonne $L = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \end{pmatrix}$ et un réel λ vérifiant :
   $$AL = L \quad \text{et} \quad X_0 = L + \lambda V.$$
   On ne cherchera pas à calculer ℓ_x, ℓ_y et λ.
10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = L + q^n \lambda V$.
11. Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (resp. $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$) est convergente vers ℓ_x (resp. ℓ_y).
12. En déduire que le vecteur colonne L est stochastique.
13. Soit T un vecteur colonne stochastique tel que $AT = T$. Montrer que $T = L$.