Chapitre 6 : Exercices

Exercice 1.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ qui décrit le déplacement d'un point du point. On suppose que f' et f'' ne s'annulent pas sur I.

1. Montrer que le point se déplace à vitesse constante si et seulement si, le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse sont orthogonaux.
2. Montrer que le point accélère si, et seulement si, l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[-\pi/2, \pi/2]$.
3. Montrer que le point décélère si, et seulement si, l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Exercice 2.

Soient $u, v, w : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ trois fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 3.

Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On considère f et g deux solutions de l'équation différentielle $y'' = ay' + by$. Montrer que la fonction w définie sur I par $w(t) = \begin{vmatrix} f(t) & f'(t) \\ g(t) & g'(t) \end{vmatrix}$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1.

Exercice 4.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $t \in I$, $f''(t) \in \operatorname{Vect}(f(t))$.

1. Montrer que l'application $t \in I \longrightarrow f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ pour $t \in I$ sont contenues dans un plan.
3. On suppose que f ne s'annule pas sur I et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ sont colinéaires. Montrer que f prend ses valeurs dans une droite.

Exercice 5.

Calculer les développements limités à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $f(t) = \left((1-t)^{-1}, (1+t)^{-1}\right)$ en 0 ;
2. $f(t) = \left(e^t, \cos(t)\right)$ en 0 ;
3. $f(t) = \left(\sin^2(t), \sqrt{1-t^2}\right)$ en 0 ;
4. $f(t) = \left(\ln^2(t), t^t\right)$ en 1 ;
5. $f(t) = \left(e^{\sin(\pi t)}, t^4\right)$ en 1 ;
6. $f(t) = \left(e^t \sin(t), \sin^3(t)\right)$ en 0.

Exercice 6.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$.

Exercice 7.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \left(\dfrac{t}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$.

Exercice 8.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ par $f(t) = \left(\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3}\right)$.

Exercice 9.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (\cos(3t), \sin(2t))$.

Exercice 10.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (2\cos(2t), \sin(3t))$.

Exercice 11.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$.

Exercice 12.

Soit l'arc paramétré par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \left((t-2)^3, t^2-4\right)$.

1. Déterminer les points d'infléxion à la courbe.
2. Pour chacun de ses points, donner une équation de la tangente à la courbe.

Exercice 13.

Soit l'arc paramétré par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \left(\mathrm{e}^t, t^2\right)$.

1. Déterminer les points d'infléxion à la courbe.
2. Pour chacun de ses points, donner une équation de la tangente à la courbe.

Exercice 14.

Calculer la longueur de la courbe paramétrée par la fonction $f : [0, 10\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

Exercice 15.

Soit la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $h(t) = \mathrm{e}^t$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h.

Exercice 16.

Soit la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $h(t) = t^{3/2}$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h.

Exercice 17.

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$.

1. Quelle transformation géométrique simple envoie le point $f(t)$ sur le point $f(t+2\pi)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
2. Tracer la courbe paramétrée par f.
3. Calculer la longueur de la courbe entre les points $f(0)$ et $f(2\pi)$.

Exercice 18.

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) + \sin(2t))$.

1. Tracer la courbe paramétrée par f.
2. Calculer la longueur de la courbe.