Programme de colle : du 16 au 20 novembre

1 Réduction des endomorphismes

1. Valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme.
2. Sous-espace propre associé à une valeur propre. On le note $E_\lambda(u)$, ou E_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
3. Spectre d'un endomorphisme.
4. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme, alors la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}$ est directe.
5. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme : il est unitaire et de degré n. On le note χ_u.
6. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Ainsi, un endomorphisme a au plus n valeurs propres.
7. Si λ est valeur propre, alors $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$ où m_λ est la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.
8. Extension des définitions précédentes et des résultats précédents aux matrices.
9. Endomorphisme diagonalisable : un endomorphisme f de E est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
10. Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E)$ si, et seulement si, le polynôme caractéristique est scindé et si pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda(f) = \dim(E_\lambda(f))$. Exemples.
11. Un endomorphisme est diagonalisable dès qu'il a n valeurs propres deux à deux distinctes.
12. Extension des résultats précédentes aux matrices. Exemples.
13. Endomorphisme trigonalisable : un endomorphisme f de E est trigonalisable si, et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
14. Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé. Corollaire : tout endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel est trigonalisable. Les étudiants doivent être guidés pour trigonaliser une matrice/un endomorphisme.
15. Application de la réduction aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
16. Application de la réduction au calcul des puissances d'une matrice.