Sur un résultat de sommation par paquets

Erik Thomas *

Résumé

Dans cette note, on s'intéresse à un résultat de sommation par paquets pour les séries à termes positifs. On montre que si f est une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs positives et continue en 0 et si la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, alors il existe une suite d'entiers naturels $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante avec $n_0 = 0$ telle que la série $\sum_{p\geq 0} f\left(\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} a_k\right)$ converge.

1 Introduction

Il est classique que si une série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} f(a_n)$ ne converge pas forcément. Le résultat est déjà mis en défaut si l'on ajoute des conditions sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (positivité) ou des hypothèses sur f (croissance, régularité).

Une question semble alors légitime : et si l'on s'autorise des paquets ? Plus précisément, le but de cette note est d'établir le résultat suivant qui, à notre connaissance, semble de pas avoir encore été publié.

Proposition 1.1. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, continue en 0 et telle que $f(0) = 0$. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série convergente à termes positifs. Il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels avec $n_0 = 0$ telle que la série $\sum_{p\geq 0} f\left(\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} a_k\right)$ soit convergente.*

2 Preuve du résultat principal

La preuve de ce résultat est élémentaire. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, strictement décroissante et vérifiant $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} f(v_n)$ converge.*

Nous prouvons le lemme 2.1.

Démonstration. On pose $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons construits $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(v_k) \leq \frac{1}{k^2}$ et $v_n < v_{n-1} < \cdots < v_0$.

Par continuité de f en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $0 \leq f(x) < \frac{1}{(n+1)^2}$.

Soit $v_{n+1} \in \left]0, \min\{\alpha, v_n\}\right[$. Par construction, on a $v_{n+1} < v_n$ et $f(v_{n+1}) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$, ce qui termine la construction.

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, il est clair que la série $\sum_{n\geq 0} f(v_n)$ converge.

$\square$

* erik.thomas@ens-rennes.fr

Nous prouvons la proposition 1.1.

Démonstration. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite donnée par le lemme 2.1. On pose $v_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

On pose $n_0 = 0$ et $\ell_0 = 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = 0$, il existe un entier n_1 tel que $\sum_{k=n_1+1}^{+\infty} a_k \leq v_1$. On a donc :

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k \leq v_0 \quad \text{et} \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} a_k \leq v_1.$$

Soit ℓ_1 le plus petit entier tel que $\sum_{k=n_1+1}^{+\infty} a_k \leq v_{\ell_1}$: on note que $\ell_1 \geq 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = 0$, il existe un entier $n_2 \geq n_1$ tel que $\sum_{k=n_2+1}^{+\infty} a_k \leq v_{\ell_1+1}$. On a donc :

$$\sum_{k=n_1}^{n_2+1} a_k \leq v_{\ell_1} \quad \text{et} \sum_{k=n_2+1}^{+\infty} a_k \leq v_{\ell_1+1}.$$

Soit $\ell_2\,(\geq \ell_1+1)$ le plus petit entier tel que $\sum_{k=n_2+1}^{+\infty} a_k \leq v_{\ell_2}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = 0$, il existe un entier $n_3 \geq n_2$ tel que $\sum_{k=n_3+1}^{+\infty} a_k \leq v_{\ell_2+1}$. On a donc :

$$\sum_{k=n_2}^{n_3+1} a_k \leq v_{\ell_2} \quad \text{et} \sum_{k=n_3+1}^{+\infty} a_k \leq v_{\ell_2+1}.$$

On construit ainsi par récurrence deux suites strictement croissantes d'entiers $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad v_{\ell_p+1} < \sum_{k=n_p+1}^{+\infty} a_k \leq v_{\ell_p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n_{p+1}}^{+\infty} a_k \leq v_{\ell_{p+1}}.$$

En particulier, on a $\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} a_k \leq v_{\ell_p}$.

Par croissance de f, on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f\left(\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} a_k\right) \leq f\left(v_{\ell_p}\right)$. Comme la série $\sum_{p\geq 0} f(v_p)$ converge, la série $\sum_{p\geq 0} f\left(v_{\ell_p}\right)$ converge (car la suite $(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante), puis la série $\sum_{p\geq 0} f\left(\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} a_k\right)$ converge.

□