Correction du devoir maison 7

Exercice 1.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \chi_\varphi(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \quad C_2 \longleftarrow C_2 + C_3 \\
&= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_3 \\
&= (\lambda-2) \times (-1) \times \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, 1, 2\}$.

2. On trouve

$$E_0(\varphi) = \mathrm{Vect}(1, -1, 0), \quad E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(-1, 1, 1) \quad \text{et} \quad E_2(\varphi) = \mathrm{Vect}(0, 1, 1).$$

   La famille $((1, -1, 0), (-1, 1, 1), (0, 1, 1))$ est une famille libre de $\mathbf{K}^3$ car constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
   Cette famille libre contient trois éléments dans un espace vectoriel de dimension 3, elle est une base de $\mathbf{K}^3$.

3. On a $\varphi(e_1) = 0 \in D$, donc D est stable par φ.
4. On a $\varphi(e_2) = e_1 \in P$ et $\varphi(e_2) = 2e_2 \in P$, donc P est stable par φ.
5. On remarque facilement que les matrices A_f et A_g commutent, donc les endomorphismes f et g commutent.
6. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$. On a :

$$\begin{aligned}
A_f X = X \quad &\iff \begin{cases} y &= x \\ x &= y \\ -z &= z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= y \\ z &= 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que 1 est valeur propre de f et $E_1(f) = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$.

7. Un simple calcul donne $A_g\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Il s'ensuit que les vecteurs propres de f pour la valeur propre 1 sont aussi des vecteurs propres de g.
8. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$. On a :

$$\begin{aligned} A_f X=-X &\iff \begin{cases} y &= -x\\ x &= -y\\ -z &= -z\end{cases}\\ &\iff y=-x\\ &\iff X=\begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   On en déduit que -1 est valeur propre de f et $E_{-1}(f)=\mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(0,0,1)\right)$.
9. On a

$$g(1,-1,0)=2(1,-1,0)\in E_{-1}(f)\quad \text{et}\quad f(0,0,1)=(0,0,1)\in E_{-1}(f).$$

10. Soit $\mathscr{B}=\left((1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\right)$. On remarque facilement que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{K}^3$.
   On a :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. (a) Pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix}\lambda&0&2\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\\ &= 2\times\begin{vmatrix}-1&\lambda\\0&-1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}\lambda&0\\0&-1\end{vmatrix}+(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda&0\\-1&0\end{vmatrix}\\ &= 2\times1+1\times(-\lambda)+(\lambda-2)\times\lambda^2\\ &= \lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2.\end{aligned}$$

   (b) On remarque que 1 est racine évidente du polynôme caractéristique, ainsi il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall\lambda\in\mathbf{R},\quad \chi_A(\lambda)=(\lambda-1)\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right).$$

   On trouve facilement $a=1$, $b=-1$ et $c=-2$, de sorte que

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)\left(\lambda^2-\lambda-2\right)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

   Ainsi, on pose $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ et $\lambda_3=2$. On obtient alors :

$$E_{-1}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right),\quad E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\quad \text{et}\quad E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

   On pose alors :

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad P=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-3&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

2. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\
&= -1 \times \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (\lambda - 3) \times \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 \\
&= (\lambda - 1)^3 \quad \text{identité remarquable.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$. Un calcul donne alors $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) B n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ car $\dim(E_1(B)) = 1 \neq 3$. B est trigonalisable dans $M_3(\mathbf{R})$ car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbf{R}$.

(c) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ soit B. On cherche une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice T.
On procède par analyse/synthèse.

- *Analyse.* On suppose qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice T. On a alors :

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_2 + e_3.$$

On remarque alors que
$$(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad e_1 \neq 0,$$
$$(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})^2(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})(e_2) \neq 0$$
et
$$(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})^3(e_3) = 0 \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})^2(e_3) \neq 0.$$
Or, $(B - \mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ainsi $\mathrm{Ker}\left((f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})^2\right) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$. On pose $e_3 = (1, 1, 1)$ de sorte que $e_3 \notin \mathrm{Ker}\left((f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})^2\right)$.
On pose alors $e_2 = f(e_3) - e_3 = (1, -2, 4) - (1, 1, 1) = (0, -3, 3)$.
On pose aussi $e_1 = f(e_2) - e_2 = (-3, 9, -3) - (0, 3, -3) = (-3, 6, -3) = -3(1, -2, 1) \in E_1(f)$.
- *Synthèse.* On vérifie facilement que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, donc forme une base de $\mathbf{R}^3$ car contient trois éléments dans un espace vectoriel de dimension 3.
Par définition, la matrice de f dans cette base est T.

On peut poser $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors : $B = PTP^{-1}$.

3. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}
\chi_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda - a_p \end{vmatrix} \\
&= \lambda^p - a_p\lambda^{p-1} - \cdots - a_2\lambda - a_1.
\end{aligned}$$

(b) • On a :

$$\lambda \mathrm{I}_p - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda - a_p \end{pmatrix}.$$

Il est clair que les $p-1$ premières colonnes forment une famille libre, donc $\mathrm{rg}\left(\lambda \mathrm{I}_p - C\right) \geq p-1$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(C\right)$. D'après le point précédent, on a $\mathrm{rg}\left(\lambda \mathrm{I}_p - C\right) \geq p-1$, donc d'après le théorème du rang, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\lambda \mathrm{I}_p - C\right)\right) = \dim\left(E_\lambda\left(C\right)\right) \leq 1$. Comme λ est valeur propre de C, on en déduit que $\dim\left(E_\lambda\left(C\right)\right) = 1$.

(c) On prouve les deux implications.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Cette implication est claire : c'est du cours.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons C diagonalisable. D'après la question 3 (b), tous les sous-espaces propres sont de dimension 1. Comme C est diagonalisable, on en déduit que l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est 1. Ainsi, χ_C est scindé à racines simples.

4. (a) On écrit $P = X^p + \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$. Il est alors clair que $P = \chi_{C(-a_0, -a_1, \ldots, -a_{p-1})}$.
L'unicité est claire.

(b) D'après les questions 3 (a) et 4 (a), Q est le polynôme caractéristique d'une matrice si et seulement si Q est unitaire.

Exercice 3.

1. • $\mathscr{C}$ n'est pas vide car contient l'endomorphisme nul.
   • Soient v_1 et v_2 deux éléments de $\mathscr{C}$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u \circ \left(\lambda v_1 + v_2\right) & = & u \circ v_1 + \lambda u \circ v_2 \\ & = & v_1 \circ u + \lambda v_2 \circ u \\ & = & \left(v_1 + \lambda v_2\right) \circ u. \end{array}$$

On a montré que $v_1 + \lambda v_2 \in \mathscr{C}$.

On a montré que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}\left(E\right)$.

2. Comme u est diagonalisable, on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E\right).$$

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(u\right)$ et soit $x \in E_\lambda\left(u\right)$. On a donc $u\left(x\right) = \lambda x$, ainsi $v\left(u\left(x\right)\right) = v\left(\lambda x\right) = \lambda v\left(x\right)$. Comme u et v commutent, il s'ensuit que $u\left(v\left(x\right)\right) = \lambda v\left(x\right)$, donc $v\left(x\right) \in E_\lambda\left(u\right)$.

4. Soit

$$A_i = \left\{ f \in \mathscr{L}\left(E\right),\ f\left(E_{\lambda_i}\left(u\right)\right) \subset E_{\lambda_i}\left(u\right) \text{ et } f = 0 \text{ sur } \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} E_{\lambda_j}\left(u\right) \right\}.$$

Il est clair que A_i a pour dimension $\mathscr{L}\left(E_{\lambda_i}\left(u\right)\right)$, soit n_i^2.
De plus, on a $\mathscr{C} = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$.
Il s'ensuit que l'on a

$$\dim\left(\mathscr{C}\right) = \sum_{i=1}^{2} n_i^2.$$