Correction du devoir maison 8

Exercice 1.

- On pose $x(t) = \sin(2t)$ et $y(t) = \sin(3t)$.
- Il est clair que les fonctions x et y sont 2π-périodiques : on restreint l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
- Il est clair que les fonctions x et y sont impaires : on restreint l'étude à $[0, \pi]$. Pour obtenir la courbe entière, il suffira de symétriser par rapport à l'origine du repère.
- Le sens de variation de la fonction sin est connu, il est inutile de dériver. on en déduit les tableaux de variations suivants :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
x	0	↗	1	↘	-1	↗	0

et

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y	0	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	0

- On en déduit la courbe suivante.

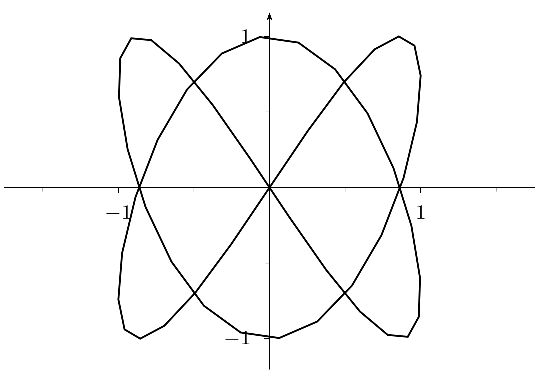

FIGURE 1 – Une courbe de Lissajous.

Exercice 2.

1. (a) On note A_k l'événement « on joue avec la pièce 1 au k-ième coup ». On traduit l'énoncé par : $\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}_{A_1}(A_2) = \frac{1}{2}$ et de manière générale si $k \geq 1$, $\mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{2}$. Par la formule des probabilités composées, on a :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   (b) Lancer la pièce 2 pour la première fois au rang $n \geq 2$ revient donc à jouer $n-1$ fois avec la pièce 1 pendant les $n-1$ premiers lancers et jouer avec la pièce 2 au n-ième. On garde les notations utilisées à la question précédente. On demande maintenant :

$$\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap \overline{A_n}\right) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}\left(\overline{A_n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

car $\mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}\left(\overline{A_n}\right)$ est la probabilité d'obtenir Face avec la pièce 1 donc égale à $\frac{1}{2}$.

2. (a) On utilise l'événement A_n « on lance la pièce 1 au n-ième lancer » de sorte que $u_n = \mathbf{P}(A_n)$. C'est un exemple typique d'application de la formule des probabilités totales. On applique cette formule avec le système complet d'événements $\left(A_n, \overline{A_n}\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) \\ &= \mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times u_n + \mathbf{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \times (1-u_n).\end{aligned}$$

D'après l'énoncé, sachant qu'au n-ième lancer on joue avec la pièce 1, la probabilité de jouer avec la pièce 1 au $(n+1)$-ième lancer est de $\frac{1}{2}$ (c'est la probabilité d'avoir Pile). Ainsi $\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$. Un même raisonnement donne $\mathbf{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 1-p$. Finalement :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \times u_n + (1-p) \times (1-u_n) = \left(p - \frac{1}{2}\right) u_n + (1-p).$$

   (b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est arithmético-géométrique. Pour donner l'expression de u_n en fonction de n, on commence par résoudre l'équation $\ell = \left(p - \frac{1}{2}\right)\ell + (1-p)$. La résolution de cette équation donne $\ell = \frac{p-1}{p-3/2}$. Il est facile de voir que la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est géométrique de raison $p - \frac{1}{2}$, d'où pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $u_{n+1} - \ell = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1}(u_1 - \ell)$. Cela donne, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(u_1 - \frac{p-1}{p-3/2}\right) + \frac{p-1}{p-3/2}.$$

Comme $u_1 = \frac{1}{2}$, on a :

$$u_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{-p+1/2}{2p-3}\right) + \frac{p-1}{p-3/2}.$$

3. (a) On introduit l'événement P_n « on obtient Pile au n-ième lancer » de sorte que $r_n = \mathbf{P}(P_n)$. On calcule $\mathbf{P}(P_n)$ grâce à la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\left(A_n, \overline{A_n}\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(P_n) &= \mathbf{P}_{A_n}(P_n) \times \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}_{\overline{A_n}}(P_n) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) \\ &= \mathbf{P}_{A_n}(P_n) \times u_n + \mathbf{P}_{\overline{A_n}}(P_n) \times (1-u_n).\end{aligned}$$

Il nous reste à calculer $\mathbf{P}_{A_n}(P_n)$ et $\mathbf{P}_{\overline{A_n}}(P_n)$.

D'après l'énoncé, on a $\mathbf{P}_{A_n}(P_n) = \frac{1}{2}$ (la pièce 1 est équilibrée) et $\mathbf{P}_{\overline{A_n}}(P_n) = p$, d'où :

$$r_n = \mathbf{P}(P_n) = \frac{1}{2} \times u_n + p \times (1-u_n).$$

(b) Comme $\left|p-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{p-1}{p-3/2}$. L'expression de r_n obtenue à la question précédente permet de dire que $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{2}\times\frac{p-1}{p-3/2}+p\times\left(1-\frac{p-1}{p-3/2}\right)=\frac{1}{3-2p}.$$

Exercice 3.

Évidemment, il faut une donner une réponse argumentée. L'énoncé étant un peu déroutant, introduisons des événements qui nous serviront. Soient G : « le joueur gagne le trésor » et B ; « le joueur choisit la bonne porte ».

Par la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\mathbf{P}(G)=\mathbf{P}_B(G)\times\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}_{\overline{B}}(G)\times\mathbf{P}\left(\overline{B}\right).$$

Comme il y a une seule porte amenant au trésor et deux portes perdantes, on a $\mathbf{P}(B)=\dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)=\dfrac{2}{3}$, soit

$$\mathbf{P}(G)=\frac{1}{3}\mathbf{P}_B(G)+\frac{2}{3}\mathbf{P}_{\overline{B}}(G).$$

- *Lorsque le joueur ne change pas de porte :*
  Le joueur gagne si, et seulement s'il avait choisi la bonne porte initialement, ainsi $\mathbf{P}_B(G)=1$ et $\mathbf{P}_{\overline{B}}(G)=0$. D'où $\mathbf{P}(G)=\dfrac{1}{3}$.
- *Lorsque le joueur change de porte :*
  Le joueur gagne si, et seulement s'il avait choisi initialement une mauvaise porte, ainsi : $\mathbf{P}_B(G)=0$ et $\mathbf{P}_{\overline{B}}(G)=1$. D'où $\mathbf{P}(G)=\dfrac{2}{3}$.

Pour optimiser nos chances de gagner, il faut choisir une porte au hasard et changer de porte lorsque l'animateur le propose.

Exercice 4.

1. On a $(X,Y)(\Omega)=[\![1,n]\!]^2$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. On a

$$\mathbf{P}\left((X=i)\cap(Y=j)\right)=\begin{cases}0 & \text{si } j>i\\ \dfrac{1}{ni} & \text{si } j\leq i\end{cases}.$$

2. Pour calculer cette probabilité, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=Y) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}_{(X=k)}(X=Y)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left((X=k)\cap(Y=k)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nk}\\ &= \frac{1}{n}H_n\end{aligned}$$

où l'on a posé $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

3. - On a $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Pour calculer $\mathbf{P}(Y = j)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. On a :

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{ni} = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}.$$

   - On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbf{P}(Y = j) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1) \\
&= \frac{1}{2n} \times \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
&= \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

1. On a déjà $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On commence par calculer $\mathbf{P}(Y \leq k)$. En utilisant l'indépendance des variables aléatoires, on a :

$$\mathbf{P}(Y \leq k) = \mathbf{P}(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq k) = \mathbf{P}((X_1 \leq k) \cap \cdots (X_n \leq k)) = \mathbf{P}(X_1 \leq k) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n \leq k).$$

   Or, les X_i suivent des lois uniformes sur $[\![1, n]\!]$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X_i \leq k) = \dfrac{k}{n}$, ainsi $\mathbf{P}(Y \leq k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^n$.

   - Si $k = 1$, on a $\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y \leq 1) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.
   - Si $k \in [\![2, n]\!]$, alors $\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(Y \leq k) - \mathbf{P}(Y \leq k-1) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{n^n}(k^n - (k-1)^n)$. On remarque que cette relation est valable pour $k = 1$.

   Il s'ensuit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(Y = k) = \dfrac{1}{n^n}(k^n - (k-1)^n)$.

2. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbf{P}(Y=k) \\
&= \frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} k\left(k^n-(k-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} \left(k^{n+1}-k(k-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{n^n}\left(k^{n+1}-(k-1+1)(k-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} \left(k^{n+1}-(k-1)^{n+1}\right)-\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^n \\
&= \frac{1}{n^n}\left(n^{n+1}-0\right)-\frac{1}{n^n}\sum_{k=0}^{n-1}k^n \quad \text{télescopage et changement d'indice} \\
&= n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$