Devoir maison numéro 9

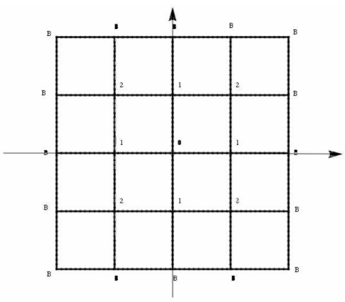
À rendre pour lundi 4 janvier 2021

Problème 1

On considère la grille suivante construite sur la carré $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$ avec :

- les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leq x \leq 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- les 5 segments horizontaux définis par $x = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $-2 \leq y \leq 2$.

Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées (i, j) avec $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. On convient d'appeler **arête** tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C, et B les points du bord du carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points (i, j) où $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ de la grille ci-dessus.

Les déplacements de l'individu sur les 25 points se font selon les trois règles suivantes :

- à l'instant 0, l'individu est placé au point central 0 ;
- à tout instant n, si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord du carré C, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M, de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête au point M ;
- à tout instant n, si l'individu arrive en un point situé au bord du carré $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point (i, j) avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1, 2 ou B de l'individu à l'instant n. Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

   (a) Justifier les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes :

   $$\mathbf{P}_{(X_n=0)}\left(X_{n+1} = B\right) = 0, \ \mathbf{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1} = B\right) = \frac{1}{4}, \ \mathbf{P}_{(X_n=2)}\left(X_{n+1} = B\right) = \frac{1}{2}$$

   et $\mathbf{P}_{(X_n=B)}\left(X_{n+1} = B\right) = 1$. En déduire que

   $$\mathbf{P}\left(X_{n+1} = B\right) = \frac{1}{4}\mathbf{P}\left(X_n = 1\right) + \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(X_n = 2\right) + \mathbf{P}\left(X_n = B\right).$$

   (b) Déterminer $\mathbf{P}_{(X_n=0)}\left(X_{n+1} = 2\right)$, $\mathbf{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1} = 2\right)$, $\mathbf{P}_{(X_n=2)}\left(X_{n+1} = 2\right)$ et $\mathbf{P}_{(X_n=B)}\left(X_{n+1} = 2\right)$. En déduire $\mathbf{P}\left(X_{n+1}\right) = 2$ en fonction de $\mathbf{P}\left(X_n = 1\right)$.

(c) En procédant de même :
  - exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1}=1)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n=0)$ et $\mathbf{P}(X_n=2)$;
  - exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1}=0)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n=1)$.

(d) Déduire de ces résultats une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1}=0) \\ \mathbf{P}(X_{n+1}=1) \\ \mathbf{P}(X_{n+1}=2) \\ \mathbf{P}(X_{n+1}=B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n=0) \\ \mathbf{P}(X_n=1) \\ \mathbf{P}(X_n=2) \\ \mathbf{P}(X_n=B) \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer le spectre de M.
3. Donner une base des sous-espaces propres de M. On donnera à chaque fois le résultat sous la forme de $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
4. Soit $D = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$.
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $V_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n=0) \\ \mathbf{P}(X_n=1) \\ \mathbf{P}(X_n=2) \\ \mathbf{P}(X_n=B) \end{pmatrix}$.

(a) Préciser le vecteur V_0 et montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $V_n = PD^nP^{-1}V_0$.

(b) Donner un vecteur $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ tel que $PX = V_0$.

(c) En déduire $P^{-1}V_0$, puis $D^nP^{-1}V_0$ et enfin les composantes de V_n pour tout $n \geq 1$.

(d) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}(X_{2n}=1) = \mathbf{P}(X_{2n-1}=2) = 0$ et préciser $\mathbf{P}(X_{2n-1}=1)$ et $\mathbf{P}(X_{2n}=2)$. Vérifier également que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_n=B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Quelle est la limite de la suite $(\mathbf{P}(X_n=B))_{n\in\mathbf{N}^*}$?

Problème 2

On pose, si cela est possible,

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\mathrm{d}u$ converge et la calculer.
3. Calculer $f(1)$.

   Indication : On pourra poser $t = \dfrac{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}{2}$.
4. Vérifier que f est positive sur $\mathscr{D}_f$.
5. Montrer que f est décroissante sur $\mathscr{D}_f$.
6. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. Justifier que $x+2 \in \mathscr{D}_f$, puis que $f(x+2) = \dfrac{x}{x+1}f(x)$.
7. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Donner une expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.
8. Pour tout réel $x > 0$, on pose $\varphi(x) = xf(x)f(x+1)$. Montrer que $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. En déduire $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
9. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

10. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f(n) f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$. En déduire que $f(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
11. En utilisant de la partie entière, donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Problème 3

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$.
L'endomorphisme nul de E est noté 0 et l'endomorphisme identité id_E.
Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_k f^k + a_{k-1} f^{k-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{id}_E$.

Partie 1 : Préliminaires

Soit f un endomorphisme de E.

1. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer que $\operatorname{Ker}(P(f))$ est stable par f.
2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de f.

   (b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et soit g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Déterminer les droites stables de $\mathbf{R}^3$ par g. On en donnera une base.
3. Soit p un entier naturel non nul.

   (a) Montrer que si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

   (b) Montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de f et $n_1, \ldots, n_p$ des entiers naturels, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{n_i}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f.
4. (a) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement ceux stables par $f - \lambda \mathrm{id}_E$.

   (b) Quel lien y-t-il entre les sous-espaces vectoriels de E stables par f et ceux stables par f^2 ?

   (c) On suppose que f est un automorphisme. Quel lien y-t-il entre les sous-espaces vectoriels de E stables par f et ceux stables par f^{-1} ?

   (d) Que dire d'un endomorphisme laissant stable tous les sous-espaces vectoriels de E ?

   (e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont les seuls sous-espaces vectoriels stables sont $\{0\}$ et E.
5. (a) On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire de E vers $\mathbf{R}$ et qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.

   Montrer qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si, et seulement s'il existe un forme linéaire φ non nulle telle que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

   (b) Soit φ une forme linéaire non nulle de E et soit $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

      i. Montrer que H est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

      ii. On note A et L les matrices de f et φ exprimées dans les bases canoniques de E et de $\mathbf{R}$. Montrer que H est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $A^T L^T = \lambda L^T$.

   (c) Donner les plans de $\mathbf{R}^3$ stables par l'endomorphisme g défini à la question 2.

Partie 2 : Cas où f est diagonalisable

Dans cette partie uniquement, on suppose que f est diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f et $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

1. Que dire des sous-espaces stables de f si $p = 1$?
2. On suppose que $p \geq 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f et soit $x \in E$.

   (a) Justifier l'existence et l'unicité de $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

   (b) Montrer que $\sum_{i=2}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) x_i \in F$.

   (c) Montrer que $x_1, \ldots, x_p$ sont tous des éléments de F.
3. Déduire de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.
4. Montrer que la restriction de f à un sous-espace stable de E est diagonalisable.
5. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f ait un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables. Donner alors ce nombre.

Partie 3 : Cas où f est nilpotent d'ordre n

1. On note D l'endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ qui, à tout polynôme P, associe son polynôme dérivé P'.

   (a) Montrer que $D^n = 0$ et $D^{n-1} \neq 0$.

   (b) Montrer que les sous-espaces de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ stables par D sont : $\{0\}, \mathbf{R}_0[X], \mathbf{R}_1[X], \ldots, \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) Déterminer en donnant une base les sous-espaces vectoriels de E stables par f.