Sur une inégalité géométrique

Erik Thomas *

Résumé

Le but de cette note est de montrer une inégalité géométrique de type « Blashke-Santaló » qui donne une minoration du produit $V(K)\,V(K^s)$ où V est le volume (i.e. la mesure de Lebesgue) et K^s un symétrisé de K (définition donnée plus bas).

1 Notations et introduction

On commence par introduire les notations utilisées dans toute la suite.

1.1 Notations

Dans toute la suite, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- On note V_n le volume (i.e. la mesure de Lebesgue) d'une partie de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^n$ est équipé de son produit scalaire canonique $\cdot$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.
- On note B_2^n la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$ pour la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.
- On note $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
- On note σ_n la mesure surfacique de $\mathbb{S}^{n-1}$.

1.2 Introduction

Le but de cette note est de s'intéresser à une inégalité géométrique de type « Blaschke-Santaló ». Rappelons la célébre inégalité de Blaschke-Santaló qui lie le volume (i.e la mesure de Lebesgue) d'un corps convexe symétrique à celui de son polaire.

Théorème 1.1. *Inégalité de Blaschke-Santaló.*

Pour tout corps convexe K (i.e. un compact convexe d'intérieur non vide) symétrique (i.e. $x \in K \Leftrightarrow -x \in K$) de barycentre nul de $\mathbb{R}^n$, on a

$$V(K)\,V(K^\circ) \leq V\left(B_2^n\right)^2$$

où K° est le polaire de K défini par $K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in K,\ x \cdot y \leq 1\}$.

L'inégalité de Blaschke-Santaló a d'abord été établie par Blaschke pour $n = 2$ et $n = 3$, puis généralisée pour n quelconque par Santaló dans [1].

Cette inégalité est encore l'objet de recherche active notamment pour la recherche de la borne inférieure du produit $V(K)\,V(K^\circ)$. Il est conjecturé que la borne inférieure du produit vaut $\dfrac{4^n}{n!}$ et est atteint (entre d'autres choses) par l'hypercube $[-1, 1]^n$.

Avant d'énoncer le résultat que nous allons établir, introduisons quelques définitions.

Définition 1.1. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ sera dit paramétrable s'il existe une fonction mesurable $\gamma : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ telle que $K = \displaystyle\bigcup_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} [0, \gamma(\theta)\,\theta]$ où $[0, \gamma(\theta)\,\theta]$ est le segment qui relie 0 au point $\gamma(\theta)\,\theta$.*

On remarque que si un ensemble est paramétrable, alors la fonction γ est unique (presque-partout). On l'appellera paramétrage de K.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Exemple 1. La boule B_2^n est paramétrable avec pour paramétrage la fonction constante égale à 1.

Définition 1.2. *Si K est un ensemble paramétrable, paramétré par γ, on définit l'ensemble K^s par*

$$K^s := \bigcup_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} \left[0, \frac{1}{\gamma(\theta)}\theta\right].$$

Autrement dit, K^s est paramétrable et paramétré par $\frac{1}{\gamma}$. On prendra la convention que $\frac{1}{0} = +\infty$.

Proposition 1.1. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ étoilé en 0 dont la surface est paramétré par une fonction mesurable $\gamma : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$. Alors, $V(B_2^n)^2 \leq V(K) V(K^s)$ avec égalité si, et seulement si, K est (un élément de classe d'équivalence de) d'une boule centrée en 0.*

2 Preuve du résultat

La preuve de ce résultat est très courte. L'argument principal est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration.

- Soit K un ensemble paramétrable paramétré par γ. On note $\mathbf{1}$ la fonction indicatrice de K. Un changement de variable donne :

$$V(K) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_K(r\theta)\, r^{n-1}\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\sigma_n(\theta).$$

Par définition de γ, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_K(r\theta)\, r^{n-1}\mathrm{d}r = \int_0^{\gamma(\theta)} r^{n-1}\mathrm{d}r = \frac{\gamma^n(\theta)}{n}.$$

Il s'ensuit que $V(K) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \gamma^n(\theta)\,\mathrm{d}\sigma_n(\theta)$. Il s'ensuit que l'on a $V(K^s) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\gamma^n(\theta)}\mathrm{d}\sigma_n(\theta)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\sigma_n\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}\sigma_n(\theta) \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \gamma^n(\theta)\,\mathrm{d}\sigma_n(\theta) \right) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\gamma^n(\theta)}\mathrm{d}\sigma_n(\theta) \right).$$

En utilisant le fait que

$$\frac{1}{n}\sigma_n\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} = V(B_2^n),$$

cela termine la preuve de la proposition 1.1.

- ⋆ Si K est tel que $V(B_2^n)^2 = V(K)V(K^s)$, alors il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi les fonctions γ^n et $\frac{1}{\gamma^n}$ sont proportionnelles, donc constante, ainsi K est une boule centrée en 0.

  ⋆ Réciproquement, si K est une boule centrée en 0 de rayon $r > 0$, en utilisant le fait que $V(K) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(1+n/2)}$ et en remarquant que K^s est la boule de centre 0 et de rayon $1/r$, il est alors clair que $V(B_2^n)^2 = V(K)V(K^s)$.

□

Remarque 1. On remarque que la quantité $V(K)V(K^s)$ peut-être infinie. Il suffit de prendre $n = 2$ et $\gamma(\theta) = \sqrt{\theta}$.

Références

[1] L. A. Santaló, *An affine invariant for convex bodies of n-dimensional space*, Portugaliae Math. 8, p. 155–161, 1949.