Correction du devoir maison 10

Exercice 1.

Soit $z \in \mathbf{C}^*$. On écrit

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = \left|a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n\right| \times \left(\frac{2}{R}\right)^n \times \frac{1}{n!}.$$

Comme $\left|\frac{R}{2}\right| < R$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n$ converge absolument, donc la suite $\left(a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

Or, la série $\sum\limits_{n \geq 0} \left(\frac{2}{R}\right)^n \times \frac{1}{n!}$ converge, il s'ensuit que la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument, donc son rayon de convergence vaut $+\infty$.

Exercice 2.

1. On remarque que ch est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Un simple calcul donne $\mathrm{ch}'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comme exp est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ l'est aussi sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

Il s'ensuit que ch est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

On notera que le rayon de convergence vaut $+\infty$.

3. Il est facile de remarquer que : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(2n)! \geq 2^n n!$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}\,(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} \\ &\leq \mathrm{e}^{x^2/2}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière. Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad S\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Or, d'après le cours, S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-R, R\right[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}\,(0)}{n!}$.

Comme S est nulle sur $\left]-\alpha, \alpha\right[$, il s'ensuit que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc S est identiquement nulle.