Correction du devoir maison 11

Exercice 1.

1. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in G \quad &\iff \quad \begin{cases} x+y &= 0 \\ z+t &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x &= -y \\ z &= -t \end{cases} \\ &\iff \quad (x,y,z,t) = (-y,y,-t,t) = y\,(-1,1,0,0) + t\,(0,0,-1,1)\,.\end{aligned}$$

   On a montré que $G = \mathrm{Vect}\left((-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\right)$, donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

2. La famille $\left((-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\right)$ est une base de $\mathbf{R}^4$ car elle est génératrice et libre car les vecteurs $(-1,1,0,0)$ et $(0,0,-1,1)$ ne sont pas colinéaires.
   On remarque que les vecteurs $(-1,1,0,0)$ et $(0,0,-1,1)$ sont orthogonaux, ainsi pour obtenir une base orthonormée de F, il suffit de les normer.
   Une base orthonormée de F est donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)\right)$.

3. • D'après la formule de la projection orthogonale, on a :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, \quad p_G(x,y,z,t) \quad &= \quad \left\langle (x,y,z,t), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0) \\ &\quad + \left\langle (x,y,z,t), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1) \\ &= \quad \frac{1}{2}(-x+y)(-1,1,0,0) + \frac{1}{2}(-z+t)(0,0,-1,1) \\ &= \quad \frac{1}{2}(x-y,-x+y,z-t,-z+t)\,.\end{aligned}$$

   • On a :

$$p_G(1,0,0,0) = \frac{1}{2}(1,-1,0,0)\,,\ p_G(0,1,0,0) = \frac{1}{2}(-1,1,0,0)\,,\ p_G(0,0,1,0) = \frac{1}{2}(0,0,1,-1)$$

   et $p_G(0,0,0,1) = \frac{1}{2}(0,0,-1,1)$. Il s'ensuit que la matrice de p_G dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. D'après la formule donnant la distance à un sous-espace vectoriel, on a :

$$\mathrm{d}\left((x_0,y_0,z_0,t_0), G\right) = \left\|(x_0,y_0,z_0,t_0) - p_G(x_0,y_0,z_0,t_0)\right\|.$$

   Or,

$$\begin{aligned}(x_0,y_0,z_0,t_0) - p_G(x_0,y_0,z_0,t_0) \quad &= \quad (x_0,y_0,z_0,t_0) - \frac{1}{2}(x_0-y_0,-x_0+y_0,z_0-t_0,-z_0+t_0) \\ &= \quad \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0, \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}z_0 + \frac{1}{2}t_0, \frac{1}{2}z_0 + \frac{1}{2}t_0\right).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right),G\right) &= \left\|\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}y_0,\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}x_0,\frac{1}{2}z_0+\frac{1}{2}t_0,\frac{1}{2}z_0+\frac{1}{2}t_0\right)\right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(x_0+y_0\right)^2+\left(z_0+t_0\right)^2}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. (a) On a :

$$\left(|x|-|y|\right)^2\geq 0 \iff x^2-2\,|xy|+y^2 \iff |xy|\leq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

(b) Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux éléments de $\ell^1(\mathbf{N})$. D'après la question 1 (a), on a :

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad |u_nv_n|\leq\frac{1}{2}\left(u_n^2+v_n^2\right).$$

Or, par hypothèses, les séries $\sum_{n\geq 0}u_n^2$ et $\sum_{n\geq 0}v_n^2$ convergent. Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0}|u_nv_n|$ converge, donc la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\ell^1(\mathbf{N})$.

2. Soients $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois éléments de $\ell^2(\mathbf{N})$.

- D'après la question 1 (b), la série $\sum_{n\geq 0}u_nv_n$ converge absolument, donc converge. Ainsi, $\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbf{N}},(v_n)_{n\in\mathbf{N}}\right)$ est bien défini.
- Vérifions que φ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbf{N})$.
  - ⋆ Par commutativité du produit, on a :

$$\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbf{N}},(v_n)_{n\in\mathbf{N}}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n=\sum_{n=0}^{+\infty}v_nu_n=\varphi\left((v_n)_{n\in\mathbf{N}},(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\right).$$

  φ est donc symétrique.
  - ⋆ Soit $\lambda\in\mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbf{N}},(v_n+\lambda w_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}u_n\left(v+\lambda w\right)_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}u_n\left(v_n+\lambda w_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_nv_n+\lambda u_nw_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}u_nw_n+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}v_nw_n \quad \text{car les deux nouvelles séries convergent} \\ &= \varphi\left((u_n)_{n\in\mathbf{N}},(v_n)_{n\in\mathbf{N}}\right)+\lambda\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbf{N}},(w_n)_{n\in\mathbf{N}}\right).\end{aligned}$$

  On a montré que φ est linéaire à droite.
  - ⋆ Comme φ est symétrique et linéaire à droite, φ est linéaire à gauche.
  - ⋆ On a :

$$\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbf{N}},(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2\geq 0,$$

  donc φ est positive.

- $\star$ Supposons que $\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbf{N}},(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) = 0$. Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$. Or, $u_n^2 \geq 0$, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 = 0$, soit $u_n = 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite nulle. φ est définie.

On a montré que φ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbf{N})$.