Correction du devoir maison 9

Problème 1

1. (a)
   - D'après les règles de la marche aléatoire, on a $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=B)=0$ puisque on ne peut pas aller en une seule étape de l'origine 0 au bord.
   - Selon les mêmes règles, on a $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=B)=\dfrac{1}{4}$ et $\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=B)=\dfrac{1}{2}$ car
     - ⋆ à partir de tout point noté 1, un seul chemin sur quatre conduit à un point noté B ;
     - ⋆ à partir de tout point noté 2, deux chemins sur quatre conduisent à un point noté B.
   - Enfin $\mathbf{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=B)=1$ puisqu'une fois parvenu en un point du bord, on y reste.
   - Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements formé des événements $(X_n=0)$, $(X_n=1)$, $(X_n=2)$ et $(X_n=B)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=B) &= \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=B)\times\mathbf{P}(X_n=0)+\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=B)\times\mathbf{P}(X_n=1)\\ &\quad+\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=B)\times\mathbf{P}(X_n=2)+\mathbf{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=B)\times\mathbf{P}(X_n=B)\\ &= \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n=1)+\frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n=2)+\mathbf{P}(X_n=B).\end{aligned}$$

   (b)
   - De même, les règles de la marche aléatoire donnent $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)$, $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)$, $\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)$ et $\mathbf{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=2)$.
   - La formule des probabilités totales appliquée avec le même système complet d'événements donne

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=2) &= \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)\times\mathbf{P}(X_n=0)+\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)\times\mathbf{P}(X_n=1)\\ &\quad+\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)\times\mathbf{P}(X_n=2)+\mathbf{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=2)\times\mathbf{P}(X_n=B)\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n=1).\end{aligned}$$

   (c) On procède de la même façon.
   -
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=1) &= \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\times\mathbf{P}(X_n=0)+\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\times\mathbf{P}(X_n=1)\\ &\quad+\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\times\mathbf{P}(X_n=2)+\mathbf{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=1)\times\mathbf{P}(X_n=B)\\ &= \mathbf{P}(X_n=0)+\frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n=2).\end{aligned}$$
   -
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=0) &= \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)\times\mathbf{P}(X_n=0)+\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)\times\mathbf{P}(X_n=1)\\ &\quad+\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)\times\mathbf{P}(X_n=2)+\mathbf{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=0)\times\mathbf{P}(X_n=B)\\ &= \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n=1).\end{aligned}$$

   (d) En regroupant les résultats précédents, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad \begin{pmatrix}\mathbf{P}(X_{n+1}=0)\\ \mathbf{P}(X_{n+1}=1)\\ \mathbf{P}(X_{n+1}=2)\\ \mathbf{P}(X_{n+1}=B)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/4&0&0\\ 1&0&1/2&0\\ 0&1/2&0&0\\ 0&1/4&1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X_n=0)\\ \mathbf{P}(X_n=1)\\ \mathbf{P}(X_n=2)\\ \mathbf{P}(X_n=B)\end{pmatrix}.$$

2. On calcule le polynôme caractéristique de M. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1/4 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & \lambda & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} && \text{développement par la dernière colonne} \\
&= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -1/4 & 0 \\ -1 & \lambda & -1/2 \\ 0 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix} && \text{développement par la première colonne} \\
&= (\lambda - 1)\left(\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 \\ -1/2 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1/4 & 0 \\ -1/2 & \lambda \end{vmatrix}\right) \\
&= (\lambda - 1)\left(\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda\right) \\
&= \lambda(\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{Sp}(M) = \left\{0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

3. Des calculs (un peu pénible !) donnent

$$E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ E_{1/\sqrt{2}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 + 2\sqrt{2} \\ 8 - 6\sqrt{2} \\ -6 + 4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   et

$$E_{-1/\sqrt{2}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{2} \\ 8 + 6\sqrt{2} \\ -6 - 4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

4. D'après les résultats de la question 3, il suffit de poser $P = \begin{pmatrix} 0 & -3 + 2\sqrt{2} & -3 - 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8 - 6\sqrt{2} & 8 + 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6 + 4\sqrt{2} & -6 - 4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) D'après l'énoncé, on a $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'après la question 1 (d), pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n = PDP^{-1}V_n$. Une récurrence immédiate montre alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $V_n = PD^nP^{-1}V_0$.

(b) On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. On a :

$$PX = V_0 \iff \begin{cases} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 - \left(3+2\sqrt{2}\right)x_3 + x_4 & = 1 \\ \left(8-6\sqrt{2}\right)x_2 + \left(8+6\sqrt{2}\right)x_3 & = 0 \\ \left(-6+4\sqrt{2}\right)x_2 - \left(6+4\sqrt{2}\right)x_3 - 2x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{cases} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 - \left(3+2\sqrt{2}\right)x_3 + x_4 & = 1 \\ \left(8-6\sqrt{2}\right)x_2 + \left(8+6\sqrt{2}\right)x_3 & = 0 \\ 2x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 - \left(3+2\sqrt{2}\right)x_3 & = \dfrac{1}{2} \\ \left(8-6\sqrt{2}\right)x_2 + \left(8+6\sqrt{2}\right)x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = -\dfrac{1}{2} \\ x_4 & = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Les deux premières lignes donnent $x_2 = -\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_1 = -\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}$, et il reste $x_1 = 1$. Il s'ensuit que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) • Comme l'égalité $PX = V_0$ est équivalente à l'égalité $X = P^{-1}V_0$, on en déduit que

$$P^{-1}V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- La relation $V_n = PD^nP^{-1}V_0$ s'écrit maintenant avec $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
V_n &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n=0) \\ \mathbf{P}(X_n=1) \\ \mathbf{P}(X_n=2) \\ \mathbf{P}(X_n=B) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(d) On observe que $\mathbf{P}(X_{2n}=1) = 0$ et $\mathbf{P}(X_{2n+1}=2) = 0$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, et que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_{2n-1}=1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_{2n}=2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2^n}.$$

On vérifie à l'aide de la formule donnant $\mathbf{P}(X_n=B)$ que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n=B) = 1$.

Problème 2

1. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$. f est continue sur $]1,+\infty[$ et prend des valeurs positives.

   On étudie la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   - On a : $f(t) \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$). Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   - On a : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x+1>1 \iff x>0$. Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x>0$.

   On a montré que $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}_+^*$.

2. On pose $x = \mathrm{e}^u$. $u \longmapsto x = \mathrm{e}^u$ est strictement croissa te sur $\mathbf{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbf{R}_+$ sur $[1,+\infty[$. La formule du changement de variable assure que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1/x} \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$ sont de même nature. Or, pour tout $A \geq 1$, on a

$$\int_1^A \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = [\mathrm{Arctan}(x)]_1^A = \mathrm{Arctan}(A) - \mathrm{Arctan}(1) = \mathrm{Arctan}(A) - \frac{\pi}{4}.$$

Or, $\lim_{A\to+\infty}\left(\text{Arctan}\,(A)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$, ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$ et vaut $\frac{\pi}{4}$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}\mathrm{d}u$ converge et vaut $\frac{\pi}{4}$.

3. Il est facile de voir que le changement de variable $u\longmapsto\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}$ est strictement croissant, de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbf{R}_+$ sur $[1,+\infty[$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$ converge, d'après le théorème de changement de variable, on a :

$$\begin{aligned}
f(1) &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})\sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\right)^2-1}}\frac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u}}{2}\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}\mathrm{d}u\\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

4. Il est clair que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\geq 0$, donc comme les bornes sont rangées dans l'ordre croissant, on en déduit que $f(x)\geq 0$.
5. Soient x_1 et x_2 deux réels strictement positifs tels que $x_1\leq x_2$. Pour tout réel $t\geq 1$, on a $t^{x_1}\leq t^{x_2}$. Ainsi, en utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $\frac{1}{t^{x_2}}\leq\frac{1}{t^{x_1}}$. En multipliant cette inégalité par $\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\geq 0$, on en déduit qur

$$\forall t\geq 1,\quad \frac{1}{t^{x_2}\sqrt{t^2-1}}\leq\frac{1}{t^{x_1}\sqrt{t^2-1}}.$$

En intégrant cette inégalité entre 1 et $+\infty$ et en utilisant la convergence des intégrales, on a $f(x_2)\leq f(x_1)$.
Il s'ensuit que f est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
6. Soit $x\in\mathbf{R}_+^*$. Il est clair que $x+2\in\mathbf{R}_+^*$. Soient $1<\varepsilon<A$. On remarque que

$$\int_\varepsilon^A\frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t=\int_\varepsilon^A t^{-x-1}\frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t.$$

On pose $u:t\longmapsto t^{-x-1}$ et $v:t\longmapsto\sqrt{t^2-1}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon,A]$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^A\frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^A t^{-x-1}\frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t\\
&= \left[t^{-x-1}\sqrt{t^2-1}\right]_\varepsilon^A-(-x-1)\int_\varepsilon^A t^{-x-2}\sqrt{t^2-1}\mathrm{d}t\\
&= A^{-x-1}\sqrt{A^2-1}-\varepsilon^{-x-1}\sqrt{\varepsilon^2-1}+(x+1)\int_\varepsilon^A\frac{t^{-x-2}\left(t^2-1\right)}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t\\
&= A^{-x-1}\sqrt{A^2-1}-\varepsilon^{-x-1}\sqrt{\varepsilon^2-1}+(x+1)\int_\varepsilon^A\frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t-(x+1)\int_\varepsilon^A\frac{1}{t^{x+2}\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On note que $\lim_{A\to+\infty}A^{-x-1}\sqrt{A^2-1}=0$ car $x>0$ et $\lim_{\varepsilon\to 1}\varepsilon^{-x-1}\sqrt{\varepsilon^2-1}=0$. Comme les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{x+2}\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$ convergent, en faisant tendre ε vers 1 et A vers $+\infty$, on en déduit que

$$f(x) = (x+1) f(x) - (x+1) f(x+2),$$

soit

$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x).$$

7. • Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on pose $\mathscr{P}_p$: « $f(2p) = \dfrac{2^{2(p-1)}\left((p-1)!\right)^2}{(2p-1)!} f(2)$ ».

   $\mathscr{P}_1$ est vraie. On suppose que $\mathscr{P}_p$ est vraie pour un certain entier naturel non nul p. On a

$$\begin{aligned} f(2(p+1)) &= f(2p+2) \\ &= \frac{2p}{2p+1} f(2p) \quad \text{question 6} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2^{2(p-1)}\left((p-1)!\right)^2}{(2p-1)!} f(2) \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(2p)^2\, 2^{2(p-1)}\left((p-1)!\right)^2}{2p\,(2p+1)\,(2p-1)!} f(2) \\ &= \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!} f(2). \end{aligned}$$

   Cela montre que $\mathscr{P}_{p+1}$ et cela termine la récurrence.

   • Pour calculer $f(2)$, on utilise à nouveau le changement de variable $t = \dfrac{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}{2}$. Une rédaction analogue à celle de la question 3 donne

$$f(2) = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}\right)^2} \mathrm{d}u = 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2u}}{\left(\mathrm{e}^{2u}+1\right)^2} \mathrm{d}u.$$

   Soit $A \geq 0$. On a

$$\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{2u}}{\left(\mathrm{e}^{2u}+1\right)^2} \mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^{2u}+1}\right]_0^A = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2A}} + \frac{1}{2}.$$

   On en déduit que $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{2u}}{\left(\mathrm{e}^{2u}+1\right)^2} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}$, ainsi $f(2) = 2$. Il vient que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad f(2p) = \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p-1)!}.$$

8. • Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. En utilisant le résultat de la question 6, on a :

$$\varphi(x+1) = (x+1) f(x+1) f(x+2) = x f(x) f(x+1) = \varphi(x).$$

   • Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \varphi(n) = \varphi(1) = 1 \times f(1) \times f(2) = \frac{\pi}{2}.$$

9. En utilisant la question 6, on peut écrire pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x} f(x+2)$. En admettant que f est continue en 2, on en déduit que

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f(2)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x}.$$

10. • La relation $f(n) f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$ valable pour $n \in \mathbf{N}^*$ découle immédiatement de la question 8.

   • Comme f est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et en utilisant la relation de la question 6, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$f(n) \geq f(n+1) \geq f(n+2) = \frac{n}{n+1} f(n).$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 1 \geq \frac{f(n+1)}{f(n)} \geq \frac{n+1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$, soit $f(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} f(n)$.

La relation $f(n) f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$ donne alors

$$\frac{\pi}{2n} = f(n) f(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} f^2(n).$$

En utilisant la positivité de f, on en déduit finalement que $f(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

11. Soit $x \in \mathbf{R}$, $x > 1$. Par définition, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Comme $\lfloor x \rfloor x \in \mathbf{N}^*$, par décroissance de f, on a $f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor)$. Ainsi,

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(x) \leq \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(\lfloor x \rfloor).$$

Or, $f(\lfloor x \rfloor) x \underset{\sim}{\to} +\infty \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(\lfloor x \rfloor) = 1$.

On montre de même que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(\lfloor x \rfloor + 1) = 1$. Par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(x) = 1$, ce qui prouve que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

Problème 3

Partie 1 : Préliminaires

1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(f))$. On remarque que les endomorphismes f et $P(f)$ commutent, ainsi

$$P(f)(f(x)) = (P(f) \circ f)(x) = (f \circ P(f))(x) = f(P(f)(x)) = f(0) = 0.$$

Ainsi, $f(x) \in \operatorname{Ker}(P(f))$.

2. (a) La phrase comporte un « si et seulement si », il faut donc traiter les deux sens.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit D un droite stable engendre par un vecteur x non nul. Comme D est stable, $f(x) \in D$, donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Comme x est non nul, x est un vecteur propre de f.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ, doit $D = \operatorname{Vect}(x)$ (D est bien une droite car x est non nul). Comme (x) forme une base de D et $f(x) = \lambda x \in D$, on en déduit que D est stable.

(b) D'après la question 2 (a), les droites stables de g sont engendrées par les vecteurs propres de g. Comme la matrice de g est triangulaire, on a $\operatorname{Sp}(g) = \{1, 2\}$. De simples calculs donnent

$$E_1(g) = \operatorname{Vect}(e_1) \quad \text{et} \quad E_2(g) = \operatorname{Vect}(e_3).$$

Comme tous les vecteurs propres de g sont soit colinéaires à e_1 soit à e_3, on en déduit que les seules droites stables de g sont les droites engendrées par e_1 et e_3.

3. (a) Il est clair que $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$: il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

Par linéarité de f, on a $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)$. Or, F_i est stable par f, donc $f(x_i) \in F_i$, donc $f(x) \in \sum_{i=1}^{p} F_i$, donc $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est stable par f.

(b) D'après la question 3 (a), pour montrer que $\sum_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{n_i}$ est stable par f, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\operatorname{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{n_i}$ est un sous-espace vectoriel stable par f.
Soit $P_i = (X-\lambda_i)^{n_i}$. Comme $\operatorname{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{n_i} = \operatorname{Ker}(P_i(f))$, la question 1 assure que $\operatorname{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{n_i}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

4. (a) Il y a encore un « si et seulement si ».

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit F est un sous-espace vectoriel de E stable par f. Soit $x \in F$. On a

$$(f-\lambda \mathrm{id}_E)(x) = f(x) - \lambda x \in F$$

car $f(x) \in F$, $\lambda x \in F$ et car F est un sous-espace vectoriel.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit F est un sous-espace vectoriel de E stable par $f - \lambda \mathrm{id}_E$. Soit $x \in F$. On a

$$f(x) = f(x) - \lambda x + \lambda x = (f-\lambda \mathrm{id}_E)(x) + \lambda x \in F$$

car $(f-\lambda \mathrm{id}_E)(x) \in F$, $\lambda x \in F$ et car F est un sous-espace vectoriel.

(b) Si F est un sous-espace vectoriel stable par f, il est clair que F est stable par f^2.
⚠La réciproque est fausse.

(c) On va montrer que, si f est un automorphisme de E, f et f^{-1} ont les mêmes sous-espaces stables.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit F un sous-espace stable par f. Il s'ensuit que l'application $f_{|F} : F \longrightarrow F$ est un automorphisme. L'automorphisme réciproque g défini par $g(x) = f^{-1}(x)$. Il s'ensuit que F est stable par f^{-1}.

$\boxed{\Longleftarrow}$ C'est le même raisonnement que ci-dessus.

(d) Soit f un endomorphisme de E laissant stable toutes droites. D'après la question 2 (a), tous les vecteurs non nuls de E sont des vecteurs propres de f : pour tout $x \in E$ non nul, il existe $\lambda_x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
Soient x et y deux vecteurs non nuls de E, montrons que $\lambda_x = \lambda_y$, cela montrera que f est une homothétie.

- On suppose que la famille (x, y) est libre. D'une part, on a

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y,$$

et d'autre part

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Comme la famille (x, y) est libre, on a $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

- Supposons que la famille (x, y) est liée : il existe $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tel que $y = \alpha x$. On a

$$\lambda_y y = \lambda_y \alpha x = f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x.$$

On en déduit que $\lambda_y \alpha x = \lambda_x \alpha x$. Comme α est non nul et x, y sont aussi non nuls, on a $\lambda_x = \lambda_y$.

(e) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Il est clair que $\{0\}$ et E sont stables par f. De plus, f n'a pas de valeur propre réelle, donc d'après la question 2 (a), f n'a pas de droite stable.
Comme les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ sont soit $\{0\}$, soit E, soit les droites, on en déduit que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par f sont $\{0\}$ et E.

5. (a) C'est du cours. Voir le chapitre 1.

(b) i. On prouve les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Il est clair que $\varphi \circ f$ est une forme linéaire. Comme H est stable par f, on a $H \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi \circ f)$.
Si $\varphi \circ f = 0$, alors on a $\varphi \circ f = 0\varphi$, ainsi $\lambda = 0$ convient.
Si $\varphi \circ f \neq 0$, alors comme H et $\mathrm{Ker}\,(\varphi \circ f)$ ont la même dimension et $H \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi \circ f)$, on en déduit que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi \circ f)$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. Soit $e_n \in E \backslash H$. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Comme $\varphi(e_n)$ et $(\varphi \circ f)(e_n)$ sont tous les deux non nuls, il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $(\varphi \circ f)(e_n) = \lambda \varphi(e_n)$.
Il est alors facile de remarquer que les endomorphismes $\varphi \circ f$ et $\lambda\varphi$ coïncident sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$, donc sont égaux.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x \in H$. On a $\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) = H$, donc H est stable par f.

ii. C'est la traduction matricielle de la question 5 (b) i.

(c) D'après la question 5 (b) ii, on commence par chercher les valeurs propres de A^T où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme A^T est triangulaire, on a $\mathrm{Sp}\left(A^T\right) = \{1, 2\}$. De simples calculs donnent

$$\mathrm{E}_1\left(A^T\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2\left(A^T\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Soit φ_1 la forme linéaire définie sur $\mathbf{R}^3$ par $\varphi_1(x, y, z) = y$. La matrice de φ_1 dans la base canonique de $\mathbf{R}_3$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}\,(\varphi_1) = \mathrm{Vect}\,((1,0,0), (0,0,1))$ est stable par g.
On montre de même que $\mathrm{Vect}\,((1,0,0), (0,1,0))$ est stable par g.

Partie 2 : Cas où f est diagonalisable

1. Si $p = 1$, alors en notant λ l'unique valeur propre de f, comme f est diagonalisable , on a $E = E_\lambda(f)$, donc $f = \lambda \mathrm{id}_E$, donc tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.

2. (a) Comme f est diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$, donc si $x \in F$, il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ unique tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

   (b) Comme F est stable par f, d'après la question 4 (a) de la partie 1, F est stable par $f - \lambda_1 \mathrm{id}_E$.
   Comme $x \in F$, $(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)(x_1) = \sum_{i=2}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) x_i \in F$.

   (c) On pose $x' = \sum_{i=2}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) x_i \in F$. Comme $x' \in F$ et comme F est stable par $f - \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)\,\mathrm{id}_E$, il s'ensuit que

$$(f - \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)\,\mathrm{id}_E)\left(x'\right) = \sum_{i=3}^{p} (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2)\, x_i \in F.$$

   En itérant ce procédé, on montre que $\prod_{i=1}^{p-1} (\lambda_p - \lambda_i)\, x_p \in F$, donc $x_p \in F$ car $\prod_{i=1}^{p-1} (\lambda_p - \lambda_i) \neq 0$.
   Un raisonnement analogue montre alors que $x_1, \ldots, x_{p-1}$ sont des éléments de F.

3. Il y a un « si et seulement si ».

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. La question précédente montre que $F = \sum_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.
Il est clair que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $F \cap E_k$ est stable par f.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Il est clair que si $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ avec F_k un sous-espace vectoriel de E_k, alors F est stable par f.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. D'après la question 3, on peut écrire $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ avec $F_i \subset E_i$.
   Soit $\mathscr{B}_i$ une base de F_i. Il est clair que $\mathscr{B}_i$ est constituée de vecteurs propres de f. Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$.
   Il est clair que $\mathscr{B}$ est une base de F constituée de vecteurs propre de f. La matrice de $f_{|F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est donc diagonale, ainsi $f_{|F}$ est donc diagonalisable.
5. Pour que f ait un nombre fini de sous-espaces stables, les sous-espaces propres doivent être de dimension 1 car s'il existe un sous-espace propre de dimension au moins 2, il comporte une infinité de droites stables.
   Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ les vecteurs propres associées aux n valeurs propres.
   Choisir un sous-espace stable revient un choisir une partie de $(e_1, \ldots, e_n)$, ce que l'on peut faire de 2^n façons.
   f admet un nombre fini de sous-espaces stables si, et seulement si, f a n valeurs propres. Le cas échánt, f admet 2^n sous-espaces stables.

Partie 3 : Cas où f est nilpotent d'ordre n

1. (a) Il est clair que, si $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, $D^n(P) = P^{(n)} = 0$ et $D^{n-1}(X^n) = n! \neq 0$, donc $D^{n-1} \neq 0$.
   (b)
   - Si $P \in \{0\}$, on a clairement $D(P) \in \{0\}$.
   - Il est clair que si $P \in \mathbf{R}_k[X]$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $D(P) \in \mathbf{R}_k[X]$.
2. (a) Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrons que la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ est une base de E. Il suffit de montrer qu'elle forme une famille libre.
   Supposons que la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ soit liée. Il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$ non nul tel que
   $$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0.$$
   Soit k le plus petit entier de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $\alpha_k \neq 0$. Ainsi,
   $$0 = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = \alpha_k f^k(x) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x).$$
   En composant cette relation par f^{n-1-k}, on obtient
   $$0 = \alpha_k f^{n-1}(x) + \alpha_{k+1} f^n(x) + \cdots.$$
   Or, $f^n(x) = 0$ et on remarque que pour tout $j \geq n$, $f^j(x) = 0$. On en déduit que $0 = \alpha_k f^{n-1}(x)$, d'où $\alpha_k = 0$ car $f^{n-1}(x) \neq 0$, ce qui contredit la définition de k.
   On en déduit que la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ est libre.
   On remarque facilement que la matrice de f dans la base $\left(f^{n-1}(x), \ldots, f(x), x\right)$ est la matrice A.
   (b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de f est A.
   Soit $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, 2!e_3, 3!e_4, \ldots, (n-1)!e_n)$. On a bien $i \in [\![3, n]\!]$, on a
   $$f((i-1)!e_i) = (i-1)!e_{i-1} = (i-1)(i-2)!e_{i-1}.$$
   Ainsi la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est B.
   (c) On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice est B. D'après la question 1 (b) de la partie 3, les sous-espaces stables de f sont alors $\{0\}, \mathrm{Vect}(e_1), \mathrm{Vect}(e_1, e_2), \ldots, \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$.