# Correction du devoir surveillé numéro 3

### Problème 1

1. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$

2. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

3. Arctan est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Sa dérivée est donnée par $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$. On a :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Arctan | $-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\left|\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$. Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$), donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ diverge, puis n'est pas absolument convergente.

5. Soit $k \in \mathbf{N}$. On a :
$$\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}.$$

6. On a :
$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

7.
   - En utilisant le résultat de la question 5, il est immédiat que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k$.
   - En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

8. On remarque que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$. Comme $0 \leq 1$ et en utilisant la croissance de l'intégrale et le résultat de la question 5, on a :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}.$$
9. En utilisant le résultat de la question 6 dans la question 7, on a :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+3} = 0$, l'inégalité établie à la question 8 montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant bornée, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$ et finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi}{4}$.
On a montré que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et sa somme vaut $\dfrac{\pi}{4}$.
10. Pour tout $u \in \left]-1,1\right[$, on a $\dfrac{1}{1+u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$. Le rayon de convergence vaut 1.
11. 
   - Soit $x \in \left]0,1\right[$. On remarque que $x^2 \in \left]-1,1\right[$. En prenant $u = x^2$ dans l'égalité établie à la question 10, on a :
   $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$
   Le rayon de convergence vaut 1.
   - Soit $x \in \left]-1,1\right[$. D'après le point précédent, pour tout $t \in \left]-1,1\right[$, $\dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ et le rayon de convergence vaut 1. Comme l'intervalle $[0,x] \subset \left]-1,1\right[$ si $x \geq 0$ ou $[x,0] \subset \left]-1,1\right[$, on peut permuter $\displaystyle\int$ et $\sum$, il s'ensuit que l'on a :
   $$\begin{aligned} \mathrm{Arctan}\,(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$
12. 
   - On a $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{\pi}{6}$.
   - Comme $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \in \left]-1,1\right[$, d'après l'égalité établie à la question 11, on a :
   $$\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}.$$
   En remarquant que $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on a
   $$\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}.$$

D'après le point précédent, on peut écrire que

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n},$$

ce qui donne

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}.$$

**Problème 2**

1. On a $X_0\left\{\Omega\right\}=\left\{2\right\}$. Ainsi, $\mathbf{E}\left(X_0\right)=2$ et $\mathbf{V}\left(X\right)=0$.
2. C'est clair d'après l'énoncé car une ampoule allumée à une probabilité de griller de $\dfrac{1}{2}$.
3. Toujours d'après l'énoncé, on a :
   - $\mathbf{P}_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=0\right)=\dfrac{1}{4}$ car la probabilité qu'une ampoule grille est de $\dfrac{1}{2}$ et les ampoules grillent de manière indépendante ;
   - $\mathbf{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=2\right)=0$ car d'après l'énoncé, une ampoule grillée le reste ;
   - $\mathbf{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)=\dfrac{1}{2}$ car l'ampoule allumée le reste avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ ;
   - $\mathbf{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=0\right)=\dfrac{1}{2}$ car l'ampoule allumée grille avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ ;
   - $\mathbf{P}_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=2\right)=0$ car une ampoule grillée le reste ;
   - $\mathbf{P}_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right)=0$ car une ampoule grillée le reste ;
   - $\mathbf{P}_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=0\right)=1$ car une ampoule grillée le reste.
4. La formules des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements donne

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(X_{n+1}=1\right) \\
= & \mathbf{P}_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right)\times\mathbf{P}\left(X_n=0\right)+\mathbf{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)\times\mathbf{P}\left(X_n=1\right)+\mathbf{P}_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right)\times\mathbf{P}\left(X_n=2\right) \\
= & \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(X_n=1\right)+\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(X_n=2\right).
\end{aligned}$$

   Une application analogue de la formule des probabilités totales donne

$$\mathbf{P}\left(X_{n+1}=0\right)=\mathbf{P}\left(X_n=0\right)$$

   et

$$\mathbf{P}\left(X_{n+1}=2\right)=\frac{1}{4}\mathbf{P}\left(X_n=0\right)+\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(X_n=1\right)+\frac{1}{4}\mathbf{P}\left(X_n=2\right).$$

   Il s'ensuit que l'on a $U_{n+1}=AU_n$.
5. (a) Par définition, on a :

$$\mathbf{E}\left(X_n\right)=0\times\mathbf{P}\left(X_n=0\right)+1\times\mathbf{P}\left(X_n=1\right)+2\times\mathbf{P}\left(X_n=2\right)=L_1U_n.$$

   (b) • Un simple calcul donne $L_1A=\dfrac{1}{2}L_1$.
   • On a :

$$\mathbf{E}\left(X_{n+1}\right)=L_1U_{n+1}=L_1AU_n=\frac{1}{2}L_1U_n=\frac{1}{2}\mathbf{E}\left(X_n\right).$$

   (c) La suite $\left(\mathbf{E}\left(X_n\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Comme $\mathbf{E}\left(X_0\right)=\dfrac{1}{2}$, on en déduit que pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a : $\mathbf{E}\left(X_n\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
6. (a) D'après la formule de transfert, on a :

$$\mathbf{E}\left(X_n^2\right)=0^2\times\mathbf{P}\left(X_n=0\right)+1^2\times\mathbf{P}\left(X_n=1\right)+2^2\times\mathbf{P}\left(X_n=2\right)=L_2U_n.$$

   (b) On trouve facilement $L_1A=\dfrac{1}{4}L_1+\dfrac{1}{4}L_2$.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X_{n+1}^2\right) &= L_2 A U_n \\
&= \frac{1}{4}\left(L_1 + L_2\right) U_n \\
&= \frac{1}{4} L_1 U_n + \frac{1}{4} + L_2 U_n \\
&= \mathbf{E}\left(X_n\right) + \frac{1}{4}\,\mathbf{E}\left(X_n^2\right) \quad \text{question 5 (a)} \\
&= \frac{1}{4}\,\mathbf{E}\left(X_n^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{question 5 (c).}
\end{aligned}$$

(d) C'est une simple vérification.

(e) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \mathbf{E}\left(X_{n+1}^2\right) - u_{n+1} \\
&= \frac{1}{4}\,\mathbf{E}\left(X_n^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{E}\left(X_n^2\right) - u_n\right) \\
&= \frac{1}{4} v_n.
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

(f) La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = \mathbf{E}\left(X_0^2\right) - u_0 = 4 - 2 = 2$, ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{E}\left(X_n^2\right) = v_n + u_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

7. Soit $n \in \mathbf{N}$. La formule de König-Huygens donne $\mathbf{V}\left(X_n\right) = \mathbf{E}\left(X_n^2\right) - \mathbf{E}\left(X_n\right)^2$. En utilisant les résultats des questions 5 (c) et 6 (f), on a :

$$\mathbf{V}\left(X_n\right) = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$