

Correction du devoir surveillé numéro 3

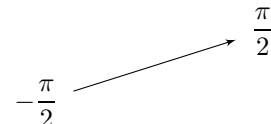
Problème 1

1. On a $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$.

2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

3. Arctan est définie et dérivable sur \mathbf{R} . Sa dérivée est donnée par $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$. On a :

x	$-\infty$	$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$



4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| = \frac{1}{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. Or, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$), donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ diverge, puis n'est pas absolument convergente.

5. Soit $k \in \mathbf{N}$. On a :

$$\int_0^1 t^{2k} dt = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}.$$

6. On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

7. • En utilisant le résultat de la question 5, il est immédiat que $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k$.

• En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t^2)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \quad \text{somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

8. On remarque que pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Comme $0 \leq 1$ et en utilisant la croissance de l'intégrale et le résultat de la question 5, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}.$$

9. En utilisant le résultat de la question 6 dans la question 7, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$, l'inégalité établie à la question 8 montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt = 0$. La suite

$((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant bornée, il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt = 0$ et finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$.

On a montré que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et sa somme vaut $\frac{\pi}{4}$.

10. Pour tout $u \in]-1, 1[$, on a $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$. Le rayon de convergence vaut 1.

11. • Soit $x \in]0, 1[$. On remarque que $x^2 \in]-1, 1[$. En prenant $u = x^2$ dans l'égalité établie à la question 10, on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Le rayon de convergence vaut 1.

• Soit $x \in]-1, 1[$. D'après le point précédent, pour tout $t \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ et le rayon de convergence vaut 1. Comme l'intervalle $[0, x] \subset]-1, 1[$ si $x \geq 0$ ou $[x, 0] \subset]-1, 1[$, on peut permuter \int et \sum , il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{aligned} \text{Arctan}(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

12. • On a $\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$.

• Comme $\frac{\sqrt{3}}{3} \in]-1, 1[$, d'après l'égalité établie à la question 11, on a :

$$\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}.$$

En remarquant que $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a

$$\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

D'après le point précédent, on peut écrire que

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n},$$

ce qui donne

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

Problème 2

1. On a $X_0 \{\Omega\} = \{2\}$. Ainsi, $\mathbf{E}(X_0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = 0$.
2. C'est clair d'après l'énoncé car une ampoule allumée à une probabilité de griller de $\frac{1}{2}$.
3. Toujours d'après l'énoncé, on a :
 - $\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$ car la probabilité qu'une ampoule grille est de $\frac{1}{2}$ et les ampoules grillent de manière indépendante;
 - $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0$ car d'après l'énoncé, une ampoule grillée le reste;
 - $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$ car l'ampoule allumée le reste avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
 - $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$ car l'ampoule allumée grille avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
 - $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$ car une ampoule grillée le reste;
 - $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0$ car une ampoule grillée le reste;
 - $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1$ car une ampoule grillée le reste.
4. La formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements donne

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \\ = & \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) \times \mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \times \mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) \times \mathbf{P}(X_n = 2) \\ = & \frac{1}{2} \mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(X_n = 2). \end{aligned}$$

Une application analogue de la formule des probabilités totales donne

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}(X_n = 0)$$

et

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{4} \mathbf{P}(X_n = 2).$$

Il s'ensuit que l'on a $U_{n+1} = AU_n$.

5. (a) Par définition, on a :

$$\mathbf{E}(X_n) = 0 \times \mathbf{P}(X_n = 0) + 1 \times \mathbf{P}(X_n = 1) + 2 \times \mathbf{P}(X_n = 2) = L_1 U_n.$$

- (b) • Un simple calcul donne $L_1 A = \frac{1}{2} L_1$.

- On a :

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = L_1 U_{n+1} = L_1 A U_n = \frac{1}{2} L_1 U_n = \frac{1}{2} \mathbf{E}(X_n).$$

- (c) La suite $(\mathbf{E}(X_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme $\mathbf{E}(X_0) = \frac{1}{2}$, on en déduit que pour

$$\text{tout } n \in \mathbf{N}, \text{ on a : } \mathbf{E}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

6. (a) D'après la formule de transfert, on a :

$$\mathbf{E}(X_n^2) = 0^2 \times \mathbf{P}(X_n = 0) + 1^2 \times \mathbf{P}(X_n = 1) + 2^2 \times \mathbf{P}(X_n = 2) = L_2 U_n.$$

- (b) On trouve facilement $L_1 A = \frac{1}{4} L_1 + \frac{1}{4} L_2$.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(X_{n+1}^2) &= L_2 A U_n \\
 &= \frac{1}{4} (L_1 + L_2) U_n \\
 &= \frac{1}{4} L_1 U_n + \frac{1}{4} + L_2 U_n \\
 &= \mathbf{E}(X_n) + \frac{1}{4} \mathbf{E}(X_n^2) \quad \text{question 5 (a)} \\
 &= \frac{1}{4} \mathbf{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{question 5 (c)}.
 \end{aligned}$$

(d) C'est une simple vérification.

(e) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \mathbf{E}(X_{n+1}^2) - u_{n+1} \\
 &= \frac{1}{4} \mathbf{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
 &= \frac{1}{4} (\mathbf{E}(X_n^2) - u_n) \\
 &= \frac{1}{4} v_n.
 \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

(f) La suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = \mathbf{E}(X_0^2) - u_0 = 4 - 2 = 2$, ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{E}(X_n^2) = v_n + u_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

7. Soit $n \in \mathbf{N}$. La formule de König-Huygens donne $\mathbf{V}(X_n) = \mathbf{E}(X_n^2) - \mathbf{E}(X_n)^2$. En utilisant les résultats des questions 5 (c) et 6 (f), on a :

$$\mathbf{V}(X_n) = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$