Correction du devoir surveillé numéro 3

Problème 1

1. On a $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ et $F_4 = 3$.
2.
   - Pour $n \geq 2$, on introduit $\mathscr{P}_n$:« $F_n \in \mathbf{N}^*$ ».
     Comme $F_1 = 1$ et $F_2 = 2$, $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont vraies. On suppose $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ vraies pour $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ assurent que $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie.
   - Pour tout $n \geq 2$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \in \mathbf{N}^*$, donc la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
3. Comme la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est croissante, elle admet une limite notée ℓ. Notons que $\ell \geq 1$ car $F_n \geq F_1 = 1$ pour tout $n \geq 1$. Si $\ell \in \mathbf{R}$, alors en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\ell = \ell + \ell$, soit $\ell = 0$, ce qui impossible.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.
4. C'est une simple vérification.
5. Ce sont de simples vérifications.
6. $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$ dont les solutions sont (question 4) φ et $-\varphi^{-1}$. Il existe donc deux réels A et B tels que
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad F_n = A\varphi^n + B\left(-\varphi\right)^n .$$
   Or, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, on en déduit le système $\begin{cases} A + B & = 0 \\ A\varphi - B\varphi^{-1} & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A & = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ B & = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$. Il s'ensuit que
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1)^n\varphi^{-n}\right).$$
7. Commme $\varphi > 1$ et $\left|-\varphi^{-1}\right| < 1$, on en déduit que $F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.
8.
   - La régle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} x^n$ vaut $\dfrac{1}{\varphi}$.
     Comme $F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} F_n x^n$ vaut également $\dfrac{1}{\varphi}$.
   - Soit $x \in \mathbf{N}$. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 0} F_n x^n$ converge, on en déduit que la suite $\left(|F_n x^n|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, donc est bornée. Soit M un majorant. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\left|\dfrac{F_n x^n}{n!}\right| \leq \dfrac{M}{n!}$. Or, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{M}{n!}$ converge. Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{F_n}{n!} x^n$ converge absolument. Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{F_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.

9. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n \quad \text{car } F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x + x \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n \\
&= x + xA(x) + x^2 A(x) \quad \text{car } F_0 = 0.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[$, $A(x)\left(1 - x - x^2\right) = x$. Comme $1 - x - x^2$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[$, on récupère

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[, \quad A(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

10. C'est une simple vérification.

11.
   - Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[$, on a $\frac{1}{1 - x\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n$ (série gémétrique). Le rayon de convergence vaut $\frac{1}{\varphi}$.
   - Pour tout $x \in \left]-\varphi, \varphi\right[$, on a $\frac{1}{1 + x/\varphi} = \frac{1}{1 - (-x/\varphi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\varphi)^{-1} x^n$. Le rayon de convergence vaut φ.

12. En utilisant les résultats des questions 9 et 10, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n &= \frac{x}{1 - x - x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\varphi)^{-1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}\right) x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière pour les séries entières de rayon strictement positifs, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}\right).$$

13. Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(\varphi x)^n}{n!} - \frac{\left(-\varphi^{-1} x\right)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\varphi x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\varphi^{-1} x\right)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{e}^{\varphi x} - \mathrm{e}^{-x/\varphi} \right) \quad \text{séries exponentielles.} \end{aligned}$$

14. D'après la question précédente, pour tout réel x, on a

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{e}^{(\varphi+1)x} - \mathrm{e}^{(1-1/\varphi)x} \right).$$

Or, $1+\varphi = \varphi^2$ et $1 - 1/\varphi = \varphi^{-2}$, ainsi

$$\begin{aligned} B(x)\,\mathrm{e}^x &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{2n} - \varphi^{-2n} x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{2n}}{n!} x^n \end{aligned}$$

car, d'après la question 6, $F_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{2n} - \varphi^{-2n} \right)$.

15. On calcule la dérivée n-ième de chacun des termes de l'égalité établie à la question précédente. Pour calculer la dérivée n-ième d'un produit, on utilise la formule de Leibniz. On a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{(k)}(x)\,\mathrm{e}^x = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k! F_{2k}}{n!} n,$$

soit

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\varphi^k \mathrm{e}^{\varphi x} - (-\varphi)^k \mathrm{e}^{-x/\varphi} \right) \mathrm{e}^x = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k! F_{2k}}{n!} n.$$

En évaluant cette relation en 0 et en utilisant la question 6, on obtient finalement

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k.$$

Problème 2

1. On a :

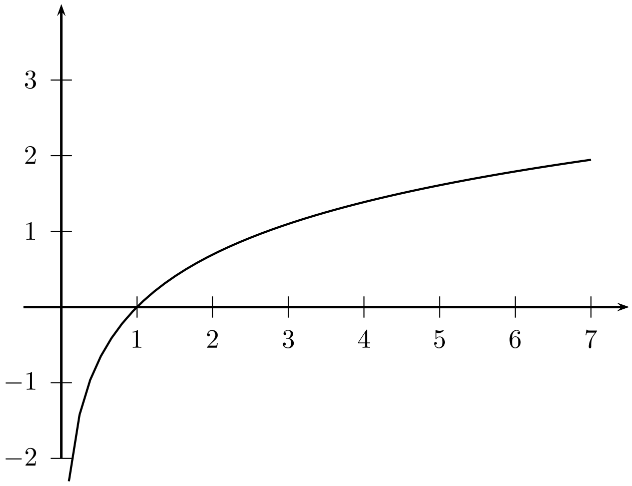

FIGURE 1 – Le graphe de la fonction logarithme népérien.

2. Soit $f : x \longmapsto \ln(x) - (x-1)$. Une simple étude de fonction montre que f est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Il s'ensuit que f admet un maximum en 1 et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$, $f(x) < 1$.
   De plus, $f(x) = f(1) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$.
3.
   - Il est clair que g est continue sur $]0,1]$. Par croissance compaée, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$, donc g est continue en 0, puis g est continue sur $[0,1]$.
   - g est dérivable sur $]0,1]$ et
   $$\forall x \in]0,1], \quad g'(x) = 1 + \ln(x).$$
   - Pour tout $x \in]0,1]$, en utilisant la stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbf{R}_+^*$, on a :
   $$1 + \ln(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}.$$
   Ainsi, g est strictement décroissante sur $\left[0, \mathrm{e}^{-1}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1}, 1\right]$.
   - On a :

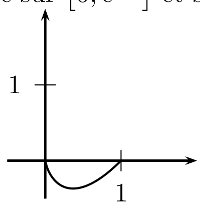

FIGURE 2 – Le graphe de la fonction g.

4. D'après le théorème de transfert, on a $H(X) = -\mathbf{E}(\ln(X))$.
5.
   - L'étude de g faîte à la question 3 montre que g prend des valeurs strictement négatives sur $]0,1[$ et nulles en 0 et 1. Or, $H(X) = -\sum\limits_{k=0}^{n} g(p_k)$, on en déduit que $H(X) \geq 0$.
   - On a :
   $$\begin{aligned} H(X) = 0 &\iff \forall k \in [\![0,n]\!],\ g(p_k) = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![0,n]\!],\ p_k \in \{0,1\} \\ &\iff \exists j \in [\![0,n]\!],\ p_j = 1 \\ &\iff X = j. \end{aligned}$$
6. (a) On a :
   $$H(X_0) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \times \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln(n+1).$$

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si $p_k = 0$, l'inégalité est claire. On suppose $p_k \neq 0$. On utilise l'inégalité de la question 2 avec $x = \dfrac{1}{(n+1)\,p_k}$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p_k\,(n+1)}\right) \leq \frac{1}{(n+1)\,p_k} - 1 \quad &\iff \quad p_k \ln\left(\frac{1}{p_k\,(n+1)}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k \\ &\iff \quad -p_k \ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k. \end{aligned}$$

(c) • En sommant l'inégalité établie à la question 6 (b) entre 0 et n, on a :

$$-\sum_{k=0}^{n} p_k \ln(p_k) - \ln(n+1) \sum_{k=0}^{n} p_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} - \sum_{k=0}^{n} p_k.$$

En utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$, on obtient :

$$H(X) - X(X_0) \leq 0.$$

• On traite les deux sens de l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $H(X) = H(X_0)$. En particulier, l'inégalité de la question précédente est une égalité :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad -p_k \ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k,$$

soit $\dfrac{1}{(n+1)\,x} = 1$ car d'après la question 2, l'inégalité $\ln(x) = x - 1$ est une égalité si, et seulement si, $x = 1$.

On en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $p_k = \dfrac{1}{n+1}$, donc X suit la même loi que X_0.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ce sens est clair.

7. • On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda'_{i,j} = 1$.

• On a :

$$\begin{aligned} -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda_{ij}\left(\ln\left(\frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right) - \frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}} + 1\right) &= -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\lambda_{ij}\ln\left(\frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right) - \lambda'_{ij} + \lambda_{i,j}\right) \\ &= K\left(X, Y, X', Y'\right) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda'_{i,j} - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda_{i,j} \\ &= K\left(X, Y, X', Y'\right). \end{aligned}$$

8. • D'après l'inégalité de la question 2, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, on a $\ln\left(\dfrac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right) - \dfrac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}} + 1 \leq 0$.

En utilisant l'expression de $K(X, Y, X', Y')$ obtenue à la question 7, on a $K(X, Y, X', Y') \geq 0$.

• On traite les deux sens de l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $K(X, Y, X', Y') = 0$. Comme $\ln\left(\dfrac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right) - \dfrac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}} + 1 \leq 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, on en déduit que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], \quad \ln\left(\frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right) = \frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}} - 1.$$

D'après le cas d'égalité de l'inégalité $\ln(x) \leq x - 1$ (question 2), on en déduit pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, $\dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda'_{ij}} = 1$, donc les couples (X, Y) et (X', Y') ont la même loi.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ce sens est clair.

9. • On a :

$$\begin{aligned}
& K\left(X, Y, X', Y'\right) \\
= \; & -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(\frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right) \\
= \; & -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(\mathbf{P}\left(X' = i \cap Y' = j\right)\right) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(\lambda_{ij}\right) \\
= \; & -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(p_i q_j\right) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(\lambda_{ij}\right) \quad \text{par indépendance de } X' \text{ et } Y' \\
= \; & \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(\lambda_{ij}\right) - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\left(\ln\left(p_i\right) + \ln\left(q_j\right)\right) \\
= \; & \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(\lambda_{ij}\right) - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(p_i\right) - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(q_j\right) \\
= \; & \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\ln\left(\lambda_{ij}\right) - \sum_{i=0}^{n}p_i\ln\left(p_i\right) - \sum_{j=0}^{m}q_j\ln\left(q_j\right) \quad \text{formule des probabilités totales} \\
= \; & H\left(X\right) + H\left(Y\right) - H\left(X, Y\right).
\end{aligned}$$

• D'après la question 8, $K\left(X, Y, X', Y'\right) \geq 0$, donc

$$H\left(X, Y\right) \leq X\left(X\right) + H\left(Y\right).$$