Devoir maison numéro 10

À rendre pour lundi 11 janvier

Exercice 1.

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ vaut $+\infty$.

Exercice 2.

On définit la fonction ch sur $\mathbf{R}$ par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Faire l'étude complète de la fonction ch.
2. Montrer que ch est développable en série entière et préciser le développement en série entière. On donnera aussi le rayon de convergence.
3. En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(x) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

Exercice 3.

Soit S une série entière de rayon de convergence non nul. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]-\alpha, \alpha\right[$, $S(x) = 0$. Justifier que S est identiquement nulle.