Devoir maison numéro 11

À rendre pour lundi 18 janvier

Exercice 1.

Soit $E = \mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4,\ x + y = z + t = 0\right\}.$$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Donner une base orthonormée de G.
3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale p_G sur G dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
4. Déterminer la distance de $(x_0, y_0, z_0, t_0) \in \mathbf{R}^4$ à G.

Exercice 2.

Soient

$$\ell^1(\mathbf{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \sum_{n\geq 0} |u_n| \text{ converge} \right\} \quad \text{et} \quad \ell^2(\mathbf{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \sum_{n\geq 0} u_n^2 \text{ converge} \right\}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|xy| \leq \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

   (b) En déduire si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux éléments de $\ell^2(\mathbf{N})$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^1(\mathbf{N})$.
2. Montrer que l'application φ définie sur $\ell^2(\mathbf{N}) \times \ell^2(\mathbf{N})$ par :

$$\forall \left((u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) \in \ell^2(\mathbf{N}) \times \ell^2(\mathbf{N}), \quad \varphi\left((u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

   Montrer que φ est bien définie et montrer que φ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbf{N})$.