

# Devoir maison numéro 11

## À rendre pour lundi 18 janvier

### Exercice 1.

Soit  $E = \mathbf{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique. On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Soit

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x + y = z + t = 0\}.$$

1. Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$ .
2. Donner une base orthonormée de  $G$ .
3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale  $p_G$  sur  $G$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^4$ .
4. Déterminer la distance de  $(x_0, y_0, z_0, t_0) \in \mathbf{R}^4$  à  $G$ .

### Exercice 2.

Soient

$$\ell^1(\mathbf{N}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge} \right\} \quad \text{et} \quad \ell^2(\mathbf{N}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \sum_{n \geq 0} u_n^2 \text{ converge} \right\}.$$

1. (a) Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .  
(b) En déduire si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont deux éléments de  $\ell^1(\mathbf{N})$ , alors  $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})$ .
2. Montrer que l'application  $\varphi$  définie sur  $\ell^2(\mathbf{N}) \times \ell^2(\mathbf{N})$  par :

$$\forall ((u_n)_{n \in \mathbf{N}}, (v_n)_{n \in \mathbf{N}}) \in \ell^2(\mathbf{N}) \times \ell^2(\mathbf{N}), \quad \varphi((u_n)_{n \in \mathbf{N}}, (v_n)_{n \in \mathbf{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Montrer que  $\varphi$  est bien définie et montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\ell^2(\mathbf{N})$ .