Devoir maison numéro 12

À rendre pour lundi 25 janvier

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, l'intégrale $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t$ converge.

   On admet dans toute la suite de l'exercice que $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t = 1$.

2. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]$

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t$$

   est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

3. Donner une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2.

Soit $A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.
2. L'isométrie associée à la matrice A est-elle directe ou indirecte ?
3. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3)$.