

Devoir maison numéro 13

À rendre pour lundi 1 février

Exercice 1.

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que AA^T est symétrique. En déduire que AA^T est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de AA^T sont positives.
3. Montrer que $\text{Ker}(A^T) = \text{Ker}(AA^T)$.

Exercice 3.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\langle AX, X \rangle = 0$.
Montrer que $A = 0$.