Devoir surveillé numéro 3 type Centrale

Mercredi 6 janvier

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

Dans tout le problème, on note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$. La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Partie 1 : Préliminaires

1. Calculer F_2, F_3 et F_4.
2. Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est un suite d'entiers strictement croissante.
3. La suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle convergente ?
4. Montrer que l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet pour solution φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$.
5. Vérifier les égalités suivantes : $\varphi - \dfrac{1}{\varphi} = 1$, $\varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$ et $\psi = \dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{1}{\varphi+1}$.
6. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}\right).$$

Partie 2 : Séries génératrices

Dans cette partie, on s'intéresse aux séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} F_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{F_n}{n!} x^n$ de la variable réelle x. On note $A(x)$ et $B(x)$ leurs sommes respectives lorsqu'elles sont définies.

7. Donner un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.
8. En déduire les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} F_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{F_n}{n!} x^n$.
9. En utilisant la relation de récurrence définissant la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[, \quad \left(1 - x - x^2\right) A(x) = x.$$

10. Montrer que pour tout réel x différent de $-\varphi$ et $\dfrac{1}{\varphi}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

11. Décomposer en série entière au voisinage de 0 les deux fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1-\varphi x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x/\varphi}$. On précisera les rayons de convergence.
12. Retrouver le résultat de la question 6.

13. Montrer que pour tout réel x, on a

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{e}^{\varphi x} - \mathrm{e}^{-x/\varphi} \right).$$

14. À l'aide du résultat précédent et des égalités établies à la question 5, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad B(x)\,\mathrm{e}^{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{2n}}{n!} x^n.$$

15. En calculant la dérivée n-ième de chacun des deux membres de l'égalité précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k.$$

Problème 2

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Représenter graphiquement la fonction ln.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si, et seulement si, $x = 1$.
3. Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(0) = 0$ et pour tout $x \in]0,1]$, $g(x) = x\ln(x)$. Montrer que g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$. Représenter graphiquement la fonction g.

Partie 2 : Entropie d'une variable aléatoire finie

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même univers Ω et prennent leurs valeurs dans $[\![0,n]\!]$ avec $n \in \mathbf{N}$.

Si X est une telle variable aléatoire, on note $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. on définit l'entropie de X par

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} p_k \ln(p_k)$$

en convenant que $p_k \ln(p_k) = 0$ si $p_k = 0$.

4. Interpréter $H(X)$ comme une espérance.
5. Montrer que $H(X) \geq 0$ et que $H(X) = 0$ si, et seulement si X une variable aléatoire certaine.
6. (a) X_0 suit une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$. Calculer $H(X_0)$.
   (b) En appliquant l'inégalité de la question 2, montrer que
   $$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad -p_k \ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k.$$
   (c) En déduire que $H(X) \leq H(X_0)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la même loi que X_0.

Partie 3 : Une inégalité sur l'entropie

Dans cette partie, m et n sont deux entiers naturels non nuls. (X,Y) et (X',Y') sont deux couples de variables aléatoires discrètes. X et X' sont à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, Y et Y' sont à valeurs dans $[\![0,m]\!]$. Pour $i \in [\![0,n]\!]$ et $j \in [\![0,m]\!]$, on note $p_i = \mathbf{P}(X = i)$, $q_j = \mathbf{P}(Y = j)$, $\lambda_{ij} = \mathbf{P}(X = i \cap Y = j)$ et $\lambda'_{ij} = \mathbf{P}(X' = i \cap Y' = j)$.

On suppose que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, $\lambda_{ij} \neq 0$ et $\lambda'_{i,j} \neq 0$.

On définit l'entropie du couple (X,Y) par

$$H(X,Y) = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda_{ij} \ln(\lambda_{ij}).$$

On définit l'information entre les couples (X,Y) et (X',Y') par

$$K(X,Y,X',Y') = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda_{ij} \ln\left(\frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right).$$

7. Rappeler les valeurs de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}$ et de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda'_{ij}$. En déduire que

$$K\left(X,Y,X',Y'\right) = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\left(\ln\left(\frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right) - \frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}} + 1\right).$$

8. À l'aide de l'inégalité de la question 2, établir que $K\left(X,Y,X',Y'\right) \geq 0$, et que l'égalité a lieu si et seulement si les deux couples (X,Y) et (X',Y') ont la même loi conjointe.
9. On suppose que les variables aléatoires X' et Y' sont indépendantes, que X' suit la même loi que X et Y' suit la même loi que Y.
   Montrer que $K\left(X,Y,X',Y'\right) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$. Déduire de ce qui précède que

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y).$$