Devoir surveillé numéro 3 type CCP

Mercredi 6 janvier

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

On s'intéresse dans ce problème à la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Soient $q \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Rappeler sans preuve une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour $q \neq 1$. Que vaut cette somme pour $q = 1$?
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Donner sans justification une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ soit convergente.
3. Donner sans justification l'ensemble de définition de la fonction Arctan, son ensemble de dérivabilité, sa dérivée et son tableau de variation, qui fera apparaître les limites.

Partie 2 : Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

4. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est-elle absolument convergente ?
5. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t$. Calculer I_k pour $k \in \mathbf{N}$.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t$.
7. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k$, puis en utilisant la question 1, montrer que
$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2n+3}.$$
9. À l'aide des trois questions précédentes, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et calculer sa somme.

Partie 3 : Une formule faisant apparaître π

10. Rappeler le développement en série entière de $u \longmapsto \dfrac{1}{1+u}$. On précisera le rayon de convergence.

11. En déduire le développement en série entière de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. On précisera le rayon de convergence. En déduire que
$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$
On précisera soigneusement le résultat utilisé ainsi que les hypothèses.
12. Calculer la valeur exacte de $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Exprimer $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ comme somme d'une série numérique. En déduire que
$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}.$$

Problème 2

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants $0, 1, 2, 3, \ldots$ Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.
À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces deux ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent être donc soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé.

À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ de rester allumée et $\dfrac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout entier naturel n, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, c'est-à-dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit le vecteur colonne $U_n \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ par : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Déterminer la loi de X_0. En déduire son espérance et sa variance.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :
$$\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Sans donner de justification, déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
$$\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0),\ \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2),\ \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1),\ \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0),$$
$$\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2),\ \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) \text{ et } \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = 0)$, $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = 2)$. Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Partie 2 : Espérance et variance des X_n

On se propose de déterminer l'espérance et la variance de toutes les variables aléatoites X_n sans chercher leur loi. On introduit les matrices de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbf{R})$
$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Calcul de l'espérance.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_n) = L_1 U_n$.

(b) Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\mathbf{E}(X_n)$.

(c) Exprimer $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.

6. Calcul du moment d'ordre 2.
On rappelle la formule du transfert : pour une variable aléatoire finie X et une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on a :

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)\,\mathbf{P}(X = k).$$

(a) En appliquant cette formule de transfert, exprimer pour tout $x \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de L_2 et de U_n.

(b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que :

$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}\left(X_{n+1}^2\right) = \dfrac{1}{4}\mathbf{E}\left(X_n^2\right) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Indication : On pourra utiliser les résultats de la question 5.

(d) On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfait la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

(e) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \mathbf{E}\left(X_n^2\right) - u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique et préciser sa raison.

(f) En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $\mathbf{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de n.

7. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de $\mathbf{V}(X_n)$ en fonction de n.