

Chapitre 10 : Exercices

Exercice 1.

Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5$. On considère la matrice $M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & c \\ a & \sqrt{2} & d \\ \sqrt{3} & b & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Déterminer les éléments $(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5$ tels que $M \in \text{O}_3(\mathbf{R})$.
2. Déterminer les éléments $(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5$ tels que $M \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$.

Exercice 2.

Déterminer les matrices triangulaires supérieures de $\text{O}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 3.

Déterminer les matrices de $\text{O}_n(\mathbf{R})$ ayant des coefficients positifs.

Exercice 4.

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}_2[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt.$$

On définit $\varphi : \mathbf{R}_2[X] \rightarrow \mathbf{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = P(1 - X)$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\varphi \in \text{O}(E)$.
3. Montrer que φ est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.
4. Calculer le déterminant de φ .

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \text{O}(E)$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \text{O}(E)$.

1. Montrer que $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.
2. Montrer que si u est diagonalisable, alors u est une symétrie orthogonale.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j)$. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$1. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad 2. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

1. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix};$
2. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix};$
3. $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \end{pmatrix};$
4. $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$

Exercice 9.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ pour que $A \in O_3(\mathbf{R})$.
2. Pour chaque couple trouvé ci-dessus, étudier l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 dont la matrice est A dans la base canonique.

Exercice 10.

Diagonaliser en base orthonormée les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$
4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 11.

Dans \mathbf{R}^3 muni de son produit scalaire usuel, donner une expression explicite de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe dirigé par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Exercice 12.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $MM^T M = I_n$.

1. Montrer que M est symétrique.
2. Montrer que $M = I_n$.

Exercice 13.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^T A = A A^T$ et $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que $S = A A^T$ est nulle.
2. En déduire que $A = 0$.

Exercice 14.

Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\text{Tr}(MM^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2$.
2. On suppose que M est symétrique. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Exercice 15.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in \text{O}_n(\mathbf{R})$.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $\langle AU, U \rangle$ en fonction des coefficients de A .
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| \leq n$.

Exercice 16.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit $M = A^T A - A A^T$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que A et A^T commutent si, et seulement si, $\text{Sp}(M) \subset \mathbf{R}_+$.

Exercice 17.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. On suppose que $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbf{R}_+$.

1. Justifier qu'il existe $P \in \text{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Soit $Y = P^T X$. Montrer que $Y^T Y = X^T X$.
3. En notant λ_{\min} et λ_{\max} la plus petite et la plus grande valeur propre de M , montrer que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \lambda_{\min} X^T X \leq X^T M X \leq \lambda_{\max} X^T X.$$

Exercice 18.

Soit \mathcal{P} un plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, i, j) . Étudier les coniques définies par les équations suivantes dans le repère (O, i, j) .

1. $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$;
2. $\mathcal{C}_2 : x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$;
3. $\mathcal{C}_3 : 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$;
4. $\mathcal{C}_4 : x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$.