# Chapitre 10 : Isométries d'un espace euclidien

## Table des matières

# 1 Matrices orthogonales

## 1.1 Généralités

**Définition 1.** *Matrice orthogonale.*
*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que $A$ est* ***orthogonale*** *si $A^T A = \mathrm{I}_n$.*
*On note $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre $n$ et on l'appelle le* ***groupe orthogonal****.*

*Exemple* 1. On a : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ et $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.

*Remarque* 1. Une matrice orthogonale est donc inversible et $A^{-1} = A^T$.

**Proposition 1.** *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes (resp. ses lignes) forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ (resp. de $\mathbf{R}^n$) muni de son produit scalaire usuel.*

*Démonstration.* On sépare le cas des colonnes et celui des lignes.

*Pour les colonnes.* On écrit $A = (C_1|\cdots|C_n)$. On traite les deux sens de l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ En notant $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ (défini par $\langle X, Y\rangle = X^T Y$), par définition $A^T A = \mathrm{I_n}$, donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad C_i^T C_j = \langle C_i, C_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est donc une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ pour le produit scalaire usuel.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ pour son produit scalaire usuel, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $C_i^T C_j = \langle C_i, C_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi, $A^T A = \mathrm{I}_n$.

*Pour les lignes.* Il suffit de remarquer que si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, alors $A^T \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

$\square$

**Proposition 2.** *Propriétés des matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.*

(i) $\mathrm{I}_n \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ *;*

(ii) *si $(A, B) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})^2$, $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.*

*Démonstration.* (i) C'est clair.

(ii) On calcule

$$\begin{aligned} \left(AB^{-1}\right)^T AB^{-1} &= \left(B^T\right)^{-1} A^T AB^{-1} \\ &= \left(B^T\right)^{-1} B^{-1} \quad \text{car } A^T A = \mathrm{I}_n \\ &= \left(BB^T\right)^{-1} \\ &= \mathrm{I}_n. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 3.** *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $E$ et $\mathscr{C}$ une autre base de $E$. $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de $E$ si, et seulement si, la matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$ est orthogonale.*

*Démonstration.* On écrit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$.
On prouve séparemment les deux équivalences.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on écrit

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} e_j$$

de sorte que $P = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $C$.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, par définition du produit matriciel, on a

$$\begin{aligned} \left(P^T P\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} p_{k,i} p_{k,j} \\ &= \langle f_i, f_j \rangle \\ &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

où $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On en déduit que $P^T P = \mathrm{I}_n$, donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ En reprenant le calcul ci-dessus, on remarque que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle f_i, f_j \rangle = \left(P^T P\right)_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de $E$.

□

## 1.2 Matrices orthogonales positives et négatives

**Proposition 4.** *Déterminant d'une matrice orthogonale.*
*Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, alors $|\det(A)| = 1$.*

*Démonstration.* Comme $\det(A) = \det\left(A^T\right)$, on a

$$1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det\left(A^T A\right) = \det(A)\det\left(A^T\right) = \det(A)^2.$$

□

**Définition 2.** *Matrices orthogonales positives et négatives.*
*Une matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est dite **positive** (ou **directe**) si $\det(A) = 1$ et **négative** (ou **indirecte**) si $\det(A) = -1$.*

**Définition 3.** *Groupe spécial orthogonal.*
*L'ensemble des matrices orthogonales positives s'appelle le **groupe spécial orthogonal** d'ordre $n$ et est noté $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.*

*Remarque* 2. La proposition 2 reste vraie pour les matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.

## 1.3 Orientation d'un espace euclidien

**Définition 4.** *Orientation de d'un espace euclidien.*
*Un espace euclidien **orienté** est un espace euclidien dans lequel on a choisit une base orthonormée.*

*Remarque* 3. La notion d'orientation est une notion qui dépend de la base choisie, ainsi il n'y a pas une façon d'orienter un espace.

**Définition 5.** *Base directe/indirecte.*
*On suppose que $E$ est orienté par une base orthonormée $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $E$. On dit que :*

(i) *$\mathscr{B}$ est **directe** si $\mathrm{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$ est de déterminant $1$ ;*
(ii) *$\mathscr{B}$ est **indirecte** si $\mathrm{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$ est de déterminant $-1$.*

*Exemple* 2. Si l'espace $\mathbf{R}^3$ est orienté par la base canonique $(i, j, k)$, les bases $(i, j, k)$, $(k, i, j)$ et $(j, k, i)$ sont directes, alors que les bases $(i, k, j)$, $(k, j, i)$ et $(j, i, k)$ sont indirectes.

# 2 Isométrie vectorielle

## 2.1 Généralités

**Définition 6.** *Isométrie vectorielle.*
*Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $\varphi$ est une* ***isométrie vectorielle*** *si*

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| = \|x\|.$$

*Exemple* 3. Les applications $\pm \mathrm{id}_E$ sont des isométries de $E$.

**Définition 7.** *Groupe orthogonal.*
*L'ensemble des isométries vectorielles de $E$ est appelé le* ***groupe orthogonal*** *de $E$ et est noté $\mathrm{O}(E)$.*

*Remarque* 4. Si $f \in \mathrm{O}(E)$, par définition, il est clair que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, donc $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$.

**Proposition 5.** *Propriétés de $\mathrm{O}(E)$.*

(i) $\mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$ *;*

(ii) *si $(f,g) \in \mathrm{O}(E)^2$, $f \circ g^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.*

*Démonstration.* (i) C'est clair.

(ii) Soit $x \in E$. Comme $g \in \mathrm{GL}(E)$ (voir remarque 4), il existe $u \in E$ tel que $x = g(u)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\left\|\left(f \circ g^{-1}\right)(x)\right\| &= \left\|f\left(g^{-1}(x)\right)\right\| \\
&= \left\|g^{-1}(x)\right\| \quad \text{car } f \in \mathrm{O}(E) \\
&= \left\|g^{-1}(g(u))\right\| \\
&= \|u\| \\
&= \|g(x)\| \\
&= \|x\| \quad \text{car } g \in \mathrm{O}(E)
\end{aligned}$$

□

**Théorème 1.** *Caractérisation des isométries vectorielles.*
*Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions sont équivalentes :*

(i) $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ *;*

(ii) *$\varphi$ conserve le produit scalaire, i.e.*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle ;$$

(iii) *l'image par $\varphi$ d'une base orthonormée de $E$ est une base orthonormée de $E$ ;*

(iv) *l'image par $\varphi$ de toute orthonormée de $E$ est une base orthonormée de $E$.*

*Démonstration.* On va montrer (i) $\Longrightarrow$ (ii), (ii) $\Longrightarrow$ (iii), (iii) $\Longrightarrow$ (iv) et (iv) $\Longrightarrow$ (i).

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Soit $(x,y) \in E^2$. On utilise une formule de polarisation :

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|\varphi(x+y)\|^2 - \|\varphi(x)\|^2 - \|\varphi(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \quad \text{car } \varphi \in \mathrm{O}(E) \\
&= \langle x, y \rangle \quad \text{formule de polarisation.}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. On note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \left\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \right\rangle = \left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{i,j}.$$

Ainsi, $\varphi(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de $E$.

$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(iv)}}$ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ telle que $\varphi(\mathscr{B})$ soit une base orthonormée de $E$.
Soit $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base orthonormée de $E$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on écrit

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k.$$

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi(f_i), \varphi(f_j) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \varphi(e_k), \sum_{\ell=0}^{n} a_{\ell,j} \varphi(e_\ell) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} a_{k,i} a_{\ell,j} \left\langle \varphi(e_k), \varphi(e_\ell) \right\rangle \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire.}\end{aligned}$$

Or, $\varphi(\mathscr{B})$ est une base orthonormée, donc $\langle \varphi(e_k), \varphi(e_\ell) \rangle = \delta_{k,\ell}$, donc

$$\left\langle \varphi(f_i), \varphi(f_j) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \left\langle f_i, f_j \right\rangle = \delta_{i,j}$$

car $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de $E$.

$\boxed{\text{(iv)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Soit $x$ un vecteur non nul de $E$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(x)$ en une base de $E$, disons $\mathscr{B} = (x, e_2, \dots, e_n)$.
On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base. D'après le procédé, le premier vecteur de la base obtenue notée $\mathscr{C}$ est $\dfrac{1}{\|x\|} x$. On écrit $\mathscr{C} = \left( \dfrac{1}{\|x\|} x, f_2, \dots, f_n \right)$.
Par hypothèse, $\varphi(\mathscr{C})$ est une base orthonormée de $E$, donc $\left\| \varphi\left( \dfrac{1}{\|x\|} x \right) \right\| = 1$, soit $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.
Enfin, il est clair que $\|\varphi(0)\| = \|0\|$.
On a montré que $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.

□

**Proposition 6.** *Lien entre* $\mathrm{O}(E)$ *et* $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.
*Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $E$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. $u \in \mathrm{O}(E)$ si, et seulement si, la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B}$ appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.*

*Démonstration.* On prouve l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ D'après le théorème 1, $u(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de $E$. De plus, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{u(\mathscr{B}),\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to u(\mathscr{B})) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ d'après la proposition 3.

$\boxed{\Longleftarrow}$ D'après ci-dessus, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{u(\mathscr{B}),\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to u(\mathscr{B}))$. D'après la proposition 3, $u(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de $E$. Le théorème 1 assure alors que $u \in \mathrm{O}(E)$.

□

*Remarque* 5. Une fois que l'on a fixé une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E$, l'application

$$\begin{cases} \mathrm{O}(E) & \longrightarrow \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \\ u & \longmapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{cases}$$

est bijective.

**Proposition 7.** *Stabilité de l'orthogonal.*
*Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ et soit $F$ un sous-espace de $E$ stable par $u$. Alors $F^{\perp}$ est stable par $u$.*

*Démonstration.* Comme $F$ est stable par $u$, on peut définir $u_{|F}$. Il est clair que $u_{|F}$ est une isométrie de $F$, donc $\mathrm{Ker}\left(u_{|F}\right) = \{0\}$ (voir remarque 4), donc $u_{|F}$ est un automorphisme de $F$.

Soit $x \in F^{\perp}$. Soit $y \in F$ : il existe $z \in F$ tel que $y = u(z)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle u(x), y\rangle &= \langle u(x), u(z)\rangle \\ &= \langle x, z\rangle \quad \text{d'après le théorème 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a montré que $u(x)$ est orthogonal à tous les éléments de $F$, donc $u(x) \in F^{\perp}$, ainsi $F^{\perp}$ est stable par $u$. □

## 2.2 Isométries vectorielles positives et négatives

**Proposition 8.** *Si* $u \in \mathrm{O}(E)$, *alors* $\det(u) = \pm 1$.

*Démonstration.* C'est clair en utilisant les propositions 6 et 4. □

**Définition 8.** *Isométrie positive ou négative.*

*Soit* $u \in \mathrm{O}(E)$. *On dit que* $u$ *est une isométrie* ***positive*** *(ou* ***directe****) si* $\det(u) = 1$ *et* ***négative*** *(ou* ***indirecte****) si* $\det(u) = -1$.

**Définition 9.** *Groupe spécial orthogonale* $\mathrm{SO}(E)$.

*L'ensemble des isométries positives de* $E$ *est appelé le* ***groupe spécial orthogonal*** *de* $E$.

*Remarque* 6. Les résultats de la proposition 5 restent vrais pour les éléments de $\mathrm{SO}(E)$.

## 2.3 Symétrie orthogonale

**Définition 10.** *Symétrie orthogonal.*

*Soit* $F$ *un sous-espace vectoriel de* $E$. *La* ***symétrie orthogonale*** *sur* $F$ *est la symétrie vectoriel sur* $F$ *parallèlement à* $F^{\perp}$.

*Remarque* 7. Si l'on note $s_F$ la projection orthogonale sur $F$ et $p_F$ la projection orthogonale sur $F$ (donc parallèlement à $F^{\perp}$), on a $s_F = p_F - p_{F^{\perp}}$. Or, comme $p_F + p_{F^{\perp}} = \mathrm{id}_E$, on en déduit que $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - 2p_{F^{\perp}}$.

**Proposition 9.** *Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.*

*Démonstration.* Soit $x \in E$ : il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Or, $s_f(x) = y - z$, donc $\|s_F(x)\| = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$. □

*Exemple* 4. Dans $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, donnons une expression de la symétrie orthogonale sur la droite $D = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$.

La famille $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ est une base orthonormée de $D$. D'après la remarque 7, on a

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad s_D(x,y,z) &= 2\left\langle (x,y,z), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) - (x,y,z) \\ &= \frac{1}{3}\left(-x+2y+2z, 2x-y+2z, 2x+2y-z\right). \end{aligned}$$

**Définition 11.** *Réflexion.*

*Une* ***réflexion*** *est une symétrie sur un hyperplan de* $E$.

**Proposition 10.** *Expression des réflexions.*

*Soit* $u$ *une réflexion sur un hyperplan* $F$. *Soit* $y \in F^{\perp}$ *et* $x$ *non nul. Alors,*

$$\forall x \in E, \quad s_F(x) = x - \frac{2}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle\, y.$$

*Démonstration.* D'après la remarque 7, on a $s_F = \mathrm{id}_E - 2p_{F^\perp}$, il suffit donc de donner une expression de $p_{F^\perp}$.

Comme $\dim\left(F^\perp\right) = 1$, la famille $\left(\frac{1}{\|y\|}y\right)$ est une base orthonormée de $F^\perp$. Ainsi

$$\forall x \in E, \quad p_{F^\perp}(x) = \left\langle x, \frac{1}{\|y\|}y \right\rangle \frac{1}{\|y\|}y = \frac{1}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle y.$$

On en déduit que

$$\forall x \in E, \quad s_F(x) = x - \frac{2}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle y.$$

□

*Exemple* 5. Dans $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, donnons une expression de la symétrie orthogonale sur le plan $P = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x + y + z = 0\right\}$.

Il est clair que le vecteur $(1, 1, 1) \in P^\perp$. D'après la proposition 10, on a

$$\begin{aligned}\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad s_P(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{2}{\|(1, 1, 1)\|^2}\langle (x, y, z), (1, 1, 1)\rangle (1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z, -2x - y - 2z, -2x - 2y - z).\end{aligned}$$

# 3 Classification des isométries vectorielles

## 3.1 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Soit $E$ un plan euclidien dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée. $E$ est donc orienté.

**Proposition 11.** *Caractérisation des isométries d'un plan euclidien.*
*Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

*Dans le premier cas, $u \in \mathrm{SO}(E)$, alors que dans le second cas, $u \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$.*

*Démonstration.* On procède par analyse/synthèse.

*Analyse.* D'après le théorème 1, $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormée de $E$. On écrit

$$u(e_1) = ae_1 + be_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = ce_1 + de_2.$$

Comme $\|u(e_1)\| = a^2 + b^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. De même, il existe $\psi \in \mathbf{R}$ tel que $c = \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\psi)$ et $d = \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\psi)$.
Or $\langle u(e_1), u(e_2)\rangle = ac + bd = 0$, donc

$$-\cos(\theta)\sin(\psi) + \sin(\theta)\cos(\psi) = \sin(\theta - \psi) = 0.$$

Ainsi, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = \psi + k\pi$. On discute suivant la parité de $k$.

(a) Si $k$ est pair, alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(b) Si $k$ est impair, alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

*Synthèse.* Réciproquement, il est clair que les matrices de la forme

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

appartiennent respectivement à $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ (donc $u \in \mathrm{SO}(E)$) et à $\mathrm{O}_2(\mathbf{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ (donc $u \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$).

□

*Remarque* 8. En utilisant la remarque 5, on en déduit que

$$\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbf{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{O}_2(\mathbf{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

**Proposition 12.** *Propriétés des matrices $R_\theta$.*
*Soit $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$. On a*

$$R(\theta) R(\theta')^{-1} = R(\theta - \theta').$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} R(\theta) R(\theta')^{-1} &= R(\theta) R(\theta')^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & \sin(\theta') \\ -\sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta') & -\sin(\theta - \theta') \\ \cos(\theta - \theta') & \sin(\theta - \theta') \end{pmatrix} \\ &= R(\theta - \theta'). \end{aligned}$$

□

**Proposition 13.** *Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$. Il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ de $E$, on a*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = R_\theta.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 11, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = R_\theta$.
Soit $\mathscr{B}'$ une base orthonormée directe de $E$. Il existe $\theta' \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = R_{\theta'}$.
On note $P = \mathrm{Pass}(\mathscr{B}' \to \mathscr{B}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E)$ de sorte que $R_\theta = P R_{\theta'} P^{-1}$.
Par la proposition 3 et la définition 5, $P \in \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$. D'après la remarque 8, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $P = R_\alpha$. La proposition 12, on a

$$R_\theta = R_{\alpha + \theta' - \alpha} = R_{\theta'}.$$

□

**Définition 12.** *Rotation, angle d'une rotation.*

(i) *Les éléments de $\mathrm{O}(E)$ s'appellent des **rotations**.*

(ii) *D'après la proposition 13, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ de $E$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = R_\theta$.*
*Par $2\pi$-périodicité des fonctions $\cos$ et $\sin$, il existe un unique élément $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = R_\theta$.*
*$\theta$ s'appelle l'**angle** de la rotation.*

**Proposition 14.** *Composition de deux rotations du plan.*
*Soient $u$ et $v$ deux rotations du plan d'angles respectifs $\theta$ et $\psi$. Alors $u \circ v$ est une rotation d'angle $\theta + \psi$.*

*Démonstration.* C'est clair d'après la proposition 12. □

**Proposition 15.** *Réduction des éléments de $\mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$.*
*Soit $u \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

*Démonstration.* D'après la proposition 11, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ et une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Il est alors clair que $u^2 = \mathrm{id}_E$, donc $u$ est une symétrie. Comme $\det(u) = -1$, $u \neq \mathrm{id}_E$. Soit $f_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $f_2 \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$ tous les deux de norme 1. Il est clair que la matrice de $u$ dans la base $(f_1, f_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que $(f_1, f_2)$ est une base de $E$, il suffit de prouver que $\langle f_1, f_2\rangle$. On a

$$\begin{aligned}\langle f_1, f_2\rangle &= \langle u(f_1), -u(f_2)\rangle \\ &= -\langle f_1, f_2\rangle \quad \text{car } u \in \mathrm{SO}(E).\end{aligned}$$

Ainsi $\langle f_1, f_2\rangle = 0$.

□

*Exemple* 6. $\mathbf{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$, orthonormée pour ce produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de $f$ ?

Il est clair que $\det(f) = 1$, ainsi $f$ est une rotation de $\mathbf{R}^2$. Soit $\theta$ l'angle de cette rotation. $\theta$ vérifie $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

*Exemple* 7. $\mathbf{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$, orthonormée pour ce produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4 \\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de $f$ ?

Il est clair que $\det(f) = -1$, donc $f$ est une symétrie orthogonale. Pour préciser ses éléments caractéristiques, on donne $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})^{\perp}$.

Soit $\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_2) &\iff \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4 \\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \\ &\iff -2x + 4y = 0 \\ &\iff x = 2y \\ &\iff \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2 \\ 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j)\right)$. On a aussi $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(i - 2j)\right)$.

## 3.2 Isométries vectorielles en dimension 3

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée.

**Proposition 16.** *Caractérisation des isométries positives de $E$.*
*Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* On procède par analyse/synthèse.

*Analyse.* On note $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{id}_E - u)$. $\chi_u$ est une fonction polynomiale de degré 3. Ainsi, ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont opposées.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\chi_u$ s'annule en une certaine valeur $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ qui est une valeur propre de $u$. On note $e_1$ un vecteur propre unitaire pour la valeur propre $\lambda_0$. Comme $u \in \mathrm{SO}(E)$, on a

$$1 = \|e_1\| = \|u(e_1)\| = \|\lambda_0 e_1\| = |\lambda_0|.$$

On en déduit que $|\lambda_0| = 1$, soit $\lambda_0 = \pm 1$.

On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1)$. D'après la proposition 7, $F^{\perp}$ est stable par $u$.

On discute maintenant suivant la valeur de $\lambda_0$.

(a) Si $\lambda_0 = 1$. Il est clair que $u_{|F^\perp}$, ainsi, d'après la proposition 11 et la proposition 15, il existe une base orthonormée $(e_2, e_3)$ de $F^\perp$ telle que

$$\mathrm{mat}_{(e_2,e_3)}\left(u_{|F^\perp}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{(e_2,e_3)}\left(u_{|F^\perp}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De sorte que la matrice de $u$ dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E$ est

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or, $\det(u) = 1$ et $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$, ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(b) Si $\lambda_0 = -1$. Il est clair que $u_{|F^\perp}$, ainsi, d'après la proposition 11 et la proposition 15, il existe une base orthonormée $(e_2, e_3)$ de $F^\perp$ telle que

$$\mathrm{mat}_{(e_2,e_3)}\left(u_{|F^\perp}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{(e_2,e_3)}\left(u_{|F^\perp}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De sorte que la matrice de $u$ dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E$ est

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or, $\det(u) = 1$ et $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = -1$, ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de $u$ dans la base orthonormée $(e_2, e_1, e_3)$ est alors

$$\mathrm{mat}_{(e_2,e_1,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta = \pi$.

*Synthèse.* La synthèse est claire, si la matrice de $u$ dans une base orthonormée de $E$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, alors $u \in \mathrm{SO}(E)$.

□

**Proposition 17.** *Caractérisation des isométries négatives de E.*

*Soit $u \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que la matrice de $u$ dans cette base est*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Comme $-u \in \mathrm{O}(E)$, d'après la proposition 16 il existe $\alpha \in \mathbf{R}$, une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(-u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $\theta = \alpha + \pi$.

□

*Exemple* 8. $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, orthonormée pour ce produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de $f$ ?

On remarque facilement que $\det(f) = 1$, donc $f$ est une rotation de l'espace. Il nous reste à préciser les éléments caractéristiques : l'axe de la rotation et son angle. Notons que l'axe de la rotation est la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) &\iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z & = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z & = 0 \\ -8z & = 0 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - \sqrt{6}L_1 \\
&\iff \begin{cases} x & = y \\ z & = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i + j)\right)$. On pose $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$.

Il nous reste à déterminer l'angle $\theta$. Comme il existe une base orthonormée $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de $f$ dans cette base $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, on en déduit que $\theta$ vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(f) = 2$, soit $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$.

Pour déterminer l'angle de la rotation, il suffit d'avoir le signe de $\sin(\theta)$. Soient $e_2$ et $e_3$ deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^3$ tels que la matrice de $f$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Soit $u \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ unitaire. On écrit $u = \alpha e_2 + \beta e_3$. On a $f(u) = (\alpha\cos(\theta) - \beta\sin(\theta))\, e_2 + (\alpha\sin(\theta) + \beta\cos(\theta))\, e_3$. Ainsi

$$[e_1, u, f(u)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha\cos(\theta) - \beta\sin(\theta) \\ 0 & \beta & \alpha\sin(\theta) + \beta\cos(\theta) \end{vmatrix} = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\sin(\theta) = \sin(\theta).$$

Dans cet exemple, en prenant $u = k$ de sorte que $f(u) = \frac{\sqrt{6}}{4}i - \frac{\sqrt{6}}{4}j + \frac{1}{2}k$, on a

$$\sin(\theta) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j), k, \frac{\sqrt{6}}{4}i - \frac{\sqrt{6}}{4}j + \frac{1}{2}k\right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On en déduit $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$f$ est la rotation d'axe dirigé par $i + j$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

*Exemple* 9. $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, orthonormée pour ce produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de $f$ ?

On remarque que $\det(f) = -1$, ainsi $f \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$.

On commence par déterminer $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + \mathrm{I}_3) \quad &\iff \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 16x + 4y + 4y & = 0 \\ -4x + 17y - z & = 0 \\ 4x + y + z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 4x + y + z & = 0 \\ -4x + 17y - z & = 0 \end{cases} \quad \text{car } L_1 = 4L_3 \\
&\iff \begin{cases} 4x + y + z & = 0 \\ 18y & = 0 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} z & = -4x \\ y & = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}(i - 4k)\right)$. On pose $e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(i - 4k)$.

Il nous reste à déterminer l'angle $\theta$. Comme il existe une base orthonormée $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de $f$ dans cette base $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, on en déduit que $\theta$ vérifie $-1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(f) = \frac{7}{9}$, soit $\cos(\theta) = \frac{8}{9}$.

Pour déterminer l'angle de la rotation, il suffit d'avoir le signe de $\sin(\theta)$. Soient $e_2$ et $e_3$ deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^3$ tels que la matrice de $f$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ soit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Si $u$ est un vecteur unitaire de $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, comme ci-dessus, on remarque que $\sin(\theta) = [e_1, u, f(u)]$.

Ainsi, en prenant $u = j$ de sorte que $f(j) = \frac{4}{9}i + \frac{8}{9}j + \frac{1}{9}k$, on a

$$\sin(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{9} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{17}}{9} > 0.$$

On en déduit que $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right)$.

# 4 Réduction des matrices symétriques réelles

Dans cette section, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui, rappelons-le, est défini par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \langle X, Y \rangle = X^T Y.$$

**Définition 13.** *Matrice symétrique.*
*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On rappelle que $A$ est* ***symétrique*** *si $A^T = A$.*

**Proposition 18.** *Existence de valeur propre réelle pour les matrices symétriques réelles.*
*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors,* $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbf{R}$.

*Démonstration.* Admis.

□

**Proposition 19.** *Orthogonalité des sous-espaces propres*
*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique.*
*Les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont deux à deux orthogonaux.*

*Démonstration.* On note $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$.
Soit $(X_i, X_j) \in E_{\lambda_i}(A) \times E_{\lambda_j}(A)$.
D'une part, on a

$$\langle AX_i, X_j \rangle = \lambda_i \langle X_i, X_j \rangle.$$

D'autre part,

$$\langle AX_i, X_j \rangle = (AX_i)^T X_j = X_i^T A^T X_j = X_i^T A X_j = \langle X_i, AX_j \rangle = \lambda_j \langle X_i, X_j \rangle.$$

On en déduit que $\lambda_i \langle X_i, X_j \rangle = \lambda_j \langle X_i, X_j \rangle$, soit $(\lambda_i - \lambda_j) \langle X_i, X_j \rangle = 0$.
Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a $\langle X_i, X_j \rangle = 0$.

□

*Exemple* 10. Les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de la matrice symétrique réelle $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

**Théorème 2.** *Théorème spectral.*
*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et une matrice $D$ diagonale telles que*

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

*Démonstration.* Admis.

□

*Remarque* 9. Le résultat est **faux** pour les matrices symétriques complexes. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique mais pas diagonalisable.
Il existe néanmoins un résultat analogue, mais il faudrait définir la notion de matrice hermitienne.

*Exemple* 11. On se propose de diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 3)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 3\}$.

(i) $\lambda = -3$. On a

$$-3\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matrice est de rang 2 et, en notant $C_1$, $C_2$ et $C_3$ ses colonnes, on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Ainsi $E_{-3}(A) = \mathrm{Ker}(-3\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Vect}\left( \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (on prend un vecteur de norme 1).

(ii) $\lambda = 3$. On a

$$3\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice est de rang 1 et en notant $C_1, C_2$ et $C_3$ ses colonnes, on remarque que $C_1 - C_2 = 0$ et $C_1 - C_3 = 0$. Il s'ensuit que $E_3(A) = \mathrm{Ker}(3\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de $E_3(A)$. On pose $X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On cherche $\widetilde{Y}$ sous la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On cherche $\alpha$ tel que

$$\left\langle \widetilde{Y}, X \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha = 0.$$

On a donc $\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On pose $Y = \frac{1}{\left\| \widetilde{Y} \right\|} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a finalement

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

On pose

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

de sorte que l'on ait $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

# 5 Application à l'étude des coniques

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats de la partie précédente pour étudier un lieu géométrique. Dans toute cette partie, un plan euclidien $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, i, j)$.

**Définition 14.** *Conique.*

*Une conique de $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant une équation de la forme*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

*avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbf{R}^6$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.*

**Proposition 20.** *Classification des coniques.*

*On reprend les notations de la définition 14. Une conique du plan $\mathscr{P}$ est parmi l'une des huit suivantes :*

(i) *l'ensemble vide (équation du type $x^2 + y^2 = -1$) ;*
(ii) *un point (équation du type $x^2 + y^2 = 0$) ;*
(iii) *une droite (équation du type $x = 3$) ;*
(iv) *deux droites parallèles (équation du type $y^2 = 5$) ;*
(v) *deux droites sécantes (équation du type $x^2 - y^2 = 0$) ;*
(vi) *une parabole (équation du type $x = y^2 + 3$) ;*
(vii) *une hyperbole (équation du type $x^2 - 3y^2 = 1$) ;*
(viii) *une ellipse (équation du type $x^2 + 3y^2 = 1$).*

*Démonstration.* Admis.

□

*Exemple* 12. On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_1$ du plan $\mathscr{P}$ dont une équation est

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0.$$

L'équation ci-dessus se réécrit en

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0.$$

La matrice $A$ est symétrique réelle, on peut la diagonaliser en base orthonormée. Ses valeurs propres sont 2 et 4 et

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

avec $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ et $D = \mathrm{diag}(2,4)$.

On pose donc $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-i+j)$.

Pour obtenir une équation de la conique dans le repère $(O, e_1, e_2)$, on procède au changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans l'équation de la conique. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T P^T A P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\iff \quad 2u^2 + 4v^2 + 8\sqrt{2}v + 6 = 0 \\
&\iff \quad u^2 + 2\left(v + \sqrt{2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la conique étudiée est une ellipse dont le centre a pour coordonnées $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ dans le repère $(O, e_1, e_2)$, soit pour coordonnées $(1,-1)$ le repère $(O, i, j)$.

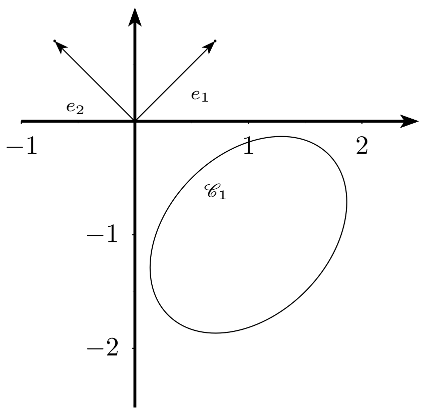


FIGURE 1 – Une ellipse.

*Exemple* 13. On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_2$ du plan $\mathscr{P}$ dont une équation est

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y = 0.$$

L'équation ci-dessus se réécrit en

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

La matrice $A$ est symétrique réelle, on peut la diagonaliser en base orthonormée. Ses valeurs propres sont 0 et 25 et

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{25}(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

avec $P = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ et $D = \mathrm{diag}(0, 25)$.

On pose donc $e_1 = \dfrac{1}{5}(3i + 4j)$ et $e_2 = \dfrac{1}{5}(-4i + 3j)$.

Pour obtenir une équation de la conique dans le repère $(O, e_1, e_2)$, on procède au changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans l'équation de la conique. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T P^T A P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \quad 25v^2 - 25u - 50v = 0 \\
&\iff \quad u = v^2 - 2v \\
&\iff \quad u = (v-1)^2 - 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la conique étudiée est une parabole dont le sommet a pour coordonnées $(-1, 1)$ dans le repère $(O, e_1, e_2)$, soit pour coordonnées $(-7/5, -1/5)$ le repère $(O, i, j)$.

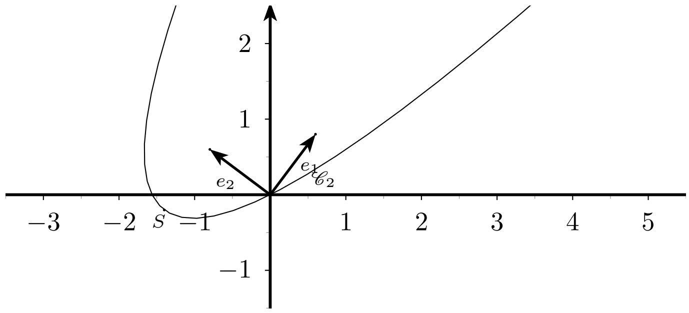


Figure 2 – Une parabole.

*Exemple* 14. On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_3$ du plan $\mathscr{P}$ dont une équation est

$$x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 - 5 = 0.$$

L'équation ci-dessus se réécrit en

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0.$$

La matrice $A$ est symétrique réelle, on peut la diagonaliser en base orthonormée. Ses valeurs propres sont 4 et $-8$ et

$$E_4(A) = \text{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-8}(A) = \text{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

avec $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ et $D = \text{diag}(4, -8)$.

On pose donc $e_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}i + j\right)$ et $e_2 = \frac{1}{2}\left(-i + \sqrt{3}j\right)$.

Pour obtenir une équation de la conique dans le repère $(O, e_1, e_2)$, on procède au changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans l'équation de la conique. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T P^T A P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 5 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4u^2 - 8v^2 - 5 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la conique étudiée est une hyperbole dont le centre a pour coordonnées $(0, 0)$ dans le repère $(O, e_1, e_2)$ soit $(0, 0)$ dans le repère $(O, i, j)$.

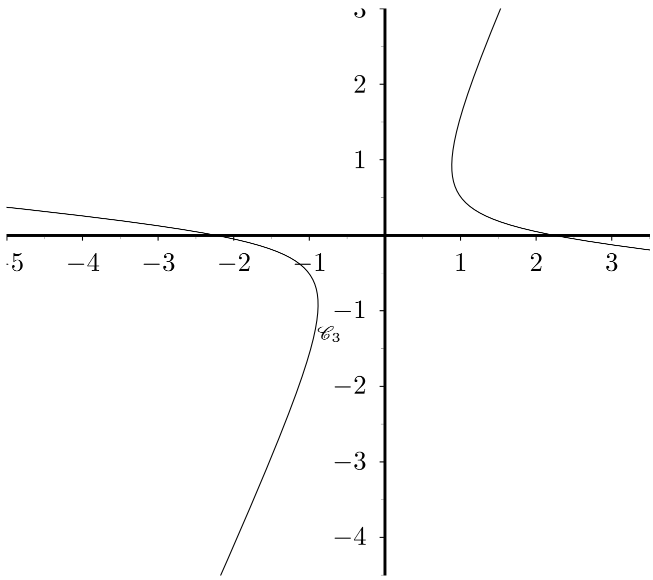


FIGURE 3 – Une hyperbole.

# 6 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir pour les concours.

## 6.1 Matrices symétriques positives/définies positives

Dans toute cette sous-partie, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui, rappelons-le, est défini par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^T Y.$$

**Définition 15.** *Matrice symétrique positive, définie positive.*

*Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. On dit que $S$ est* ***positive*** *(resp.* ***définie positive****), si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul, $\langle SX, X \rangle \geq 0$ (resp. $\langle SX, X \rangle > 0$).*

*On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices positives (resp. définies positives).*

Les matrices symétrique positives et définies positives se caractérisent facilement à l'aide du spectre.

**Proposition 21.** *Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) si, et seulement si,* $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+$ *(resp.* $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+^*$*).*

*Démonstration.* On traite seulement la première équivalence : $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+$. L'autre équivalence se traite de manière analogue.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$. Soit $X$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $\langle SX, X \rangle \geq 0$. Or,

$$\langle SX, X \rangle = \langle \lambda X, X \rangle = \lambda \|X\|^2.$$

Ainsi, $\lambda = \dfrac{\langle SX, X \rangle}{\|X\|^2} \geq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $S$ comptées avec leurs ordres de multiplicité. On note $X_1, \ldots, X_n$ des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Comme $S$ est diagonalisable (théorème spectral), la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ainsi il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$. On a donc

$$\langle SX, X \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i X_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \|X_i\|^2 \geq 0$$

car pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$.

$\square$

**Proposition 22.** *Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, alors $A^T A$ et $AA^T$ appartiennent à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.*

*Remarque* 10. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, alors $A^T A$ et $AA^T$ sont encore symétriques positives.

*Démonstration.* On a $\left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^T A$, ainsi $A^T A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul. On a

$$\left\langle A^T AX, X\right\rangle = \left(A^T AX\right)^T X = X^T A^T AX = (AX)^T AX = \langle AX, AX\rangle = \|AX\|^2 > 0$$

car $AX \neq 0$ car $A$ est inversible et $X$ non nul. Ainsi, $A^T A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.
On montre de même que $AA^T \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

$\square$

**Proposition 23.** *Caractérisation des produits scalaires.*
*Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Soit $\varphi_A$ l'application définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ par :*

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \varphi_A(X, Y) = \langle AX, Y\rangle .$$

*Alors, $\varphi_A$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.*

*Remarque* 11. En fait, on peut être plus précis et montrer que **tout** produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est de la forme $\varphi_A$ pour une certaine matrice $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

*Démonstration.* On traite séparemment les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ La linéarité par rapport à chacune des variables est claire. De même, la symétrie de $\varphi_A$ est claire.
Comme $\varphi_A$ est positive et définie positive, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul, on a $\langle AX, X\rangle = \varphi_A(X, X) = \|X\|_A > 0$ où $\|\cdot\|_A$ est la norme associée au produit scalaire $\varphi_A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La bilinéarité et la symétrie de $\varphi_A$ sont clairs.
Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a bien $\varphi_A(X, X) = \langle AX, X\rangle \geq 0$
De plus, si $\varphi_A(X) = 0$, alors $X = 0$ car si $X \neq 0$, comme $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, on aurait $\varphi_A(X) = \langle AX, X\rangle > 0$.

$\square$

## 6.2 Racine carrée de matrices symétriques positives

**Proposition 24.** *Racine carrée de matrice symétrique positive.*
*Soit $A \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.*
*On note $B = \sqrt{A}$* ***en n'oubliant pas qu'il ne s'agit que d'une notation.***
*De plus, si $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors $\sqrt{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.*

*Remarque* 12. Cette proposition assure que les matrices symétriques se comportent comme les nombres positifs.

*Démonstration.* On sépare l'existence de l'unicité.

*Existence.* D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $D$ diagonale telle que $A = PDP^{-1} = PDP^P$.
D'après la proposition 21, les coefficients de $D$, disons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sont positifs.
Soit $B = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^T$. On a

$$B^T = \left(P^T\right)^T \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)^T P^T = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^T = B.$$

De plus,

$$B^2 = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^T P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^T = P(\lambda_n, \ldots, \lambda_n) P^T = A.$$

*Unicité.* En reprenant les notations de l'existence, on pose $B_1 = P\text{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^T$. On a $B_1^2 = A$.
Supposons qu'il y existe une autre matrice symétrique positives $B_2$ telle que $B_2^2 = A$.
On a $B_2 A = B_2^3 = AB_2$, donc $B_2$ commute avec $A$. On montre de même $B_2$ commute avec $A^i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, puis $A$ commute avec $Q(A)$ pour tout $Q \in \mathbf{R}[X]$.
En choisissant $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.
Or, $Q(A) = Q\left(PDP^{-1}\right) = PQ(D)P^{-1} = P\text{diag}\left(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)\right)P^{-1} = B_1$, ainsi $B_2$ et $B_1$ commutent.
D'après le corollaire 8 du chapitre 5 « Réduction des endomorphismes », $B_1$ et $B_2$ sont diagonalisables dans une même base : il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ et deux matrices diagonales $D_1$ et $D_2$ telles que

$$B_1 = PD_1P^{-1} \quad \text{et} \quad B_2 = PD_2P^{-1}.$$

Or, $B_1^2 = B_2^2 = A$, donc $D_1^2 = D_2^2$, puis comme les coefficients de $D_1$ et $D_2$ sont positifs (car $B_1$ et $B_2$ appartiennent à $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$), on en déduit $D_1 = D_2$, puis $B_1 = B_2$.

□

## 6.3 Décomposition polaire

**Proposition 25.** *Décomposition polaire.*
*Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$. Il existe un unique couple $(S, O) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \times \text{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.*

*Remarque* 13. La décomposition polaire est à rapprocher de l'écriture exponentielle $z = r\text{e}^{\text{i}\theta}$ pour les nombres complexes.

*Démonstration.* Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$.
On procède par analyse/synthèse.

*Analyse.* On suppose qu'une telle décomposition existe : il existe un couple $(S, O) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \times \text{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.
On a alors $A^T = (OS)^T = S^T O^T = SO^T$ car $S$ est symétrique. Il s'ensuit que $A^T A = SO^T OS = S^2$.
D'après la proposition 24, il existe une unique matrice $U \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $U^2 = S$.
Il s'ensuit que $O = AS^{-1} = AU^{-2}$.

*Synthèse.* On reprend les matrices $U$ et $O$ définies ci-dessus : $S = \sqrt{A^T A}$ et $O = AS^{-1}$. Il est clair que $OS = A$.
Comme $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$, $A^T A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ (proposition 22).
Puis, $O^T O = \left(AS^{-1}\right)^T AS^{-1} = S^{-1}A^T AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \text{I}_n$, ainsi $O \in \text{O}_n(\mathbf{R})$.

□