Chapitre 9 : Espaces préhilbertiens réels

Table des matières

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

1 Généralités

1.1 Produit scalaire

Définition 1. *Produit scalaire.*

Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On dit que φ est un ***produit scalaire*** *sur E si :*

(i) *φ est* ***linéaire à gauche*** *: pour tout $y \in E$, $x \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire ;*

(ii) *φ est* ***linéaire à droite*** *: pour tout $x \in E$, $y \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire ;*

(iii) *φ est* ***symétrique*** *: pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;*

(iv) *φ est* ***positive*** *: pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$;*

(v) *φ est* ***définie*** *: pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.*

⚠Attention de ne pas parler de la linéarité d'un produit scalaire. Un produit scalaire est linéaire à gauche **et** à droite mais **n'est pas** linéaire.

Remarque 1. Si le point (iii) est vérifié, les points (i) et (ii) sont équivalents.

Remarque 2. Une récurrence immédiate montre alors que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et pour tout $(y_1, \ldots, y_m) \in E^m$, on a

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{m} y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle x_i, y_j \rangle .$$

Exemple 1. Les exemples suivants sont fondamentaux et à connaître.

(i) Le produit scalaire canonique sur $E = \mathbf{R}^n$ est défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

(ii) Si $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, l'application φ définie par :

$$\forall (f, g) \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})^2, \quad \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

(iii) Si $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, l'application φ définie par

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\left(AB^T\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

(iv) Si $E = \mathbf{R}_n[X]$, l'application φ définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0)$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Le produit scalaire est rarement noté φ. On le note $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(\cdot, \cdot)$ ou plus simplement $\cdot$.

Définition 2. *Espace préhilbertien réel/espace vectoriel euclidien.*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ muni d'un produit scalaire. On dit que E est un ***espace préhilbertien réel****.*

Si l'on suppose que E est de dimension finie, E est alors un ***espace euclidien****.*

1.2 Norme associée à un produit scalaire

Dans toute la suite du chapitre, E est muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Définition 3. *Norme associée à un produit scalaire.*
La norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est l'application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Exemple 2. La norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$ est

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Proposition 1. *Propriétés de la norme.*
La norme $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ vérifie les propriétés suivantes.

(i) *La norme est **positive** : pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$.*

(ii) *La norme vérifie la **propriété de séparation** : pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.*

(iii) *La norme vérifie la **propriété d'homogénéité** : pour tout $x \in E$ et pour tout réel λ, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.*

Démonstration. Les preuves découlent immédiatement des définitions 1 et 3.

□

Proposition 2. *Identités remarquables.*
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$;

(ii) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$;

(iii) $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y, x-y\rangle$.

Démonstration. On prouve seulement (i), les preuves de (ii) et (iii) sont analogues.
Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle && \text{par définition de la norme}\\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle && \text{par linéarité à gauche}\\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle && \text{par linéarité à droite}\\
&= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle && \text{par symétrie}\\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 && \text{par définition de la norme.}
\end{aligned}$$

□

On en déduit alors la proposition suivante.

Proposition 3. *Identité de polarisation.*
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Démonstration. D'après la proposition 2, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2,$$

autrement dit

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

□

Proposition 4. *Identité du parallélogramme.*
Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Démonstration. D'après la proposition 2, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

En sommant ces deux égalités, on trouve le résultat souhaité.

□

Remarque 3. Cette égalité peut ne pas paraître intéressante car elle découle uniquement des identités remarquables pour le produit scalaire. Il n'en est rien ! D'une certaine façon, elle « caractérise » le produit scalaire.

La proposition suivante est fondamentale et riche d'applications.

Proposition 5. *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*
Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Démonstration. On traite séparemment l'inégalité du cas d'égalité.

Inégalité. Si $x = 0$, l'inégalité est claire.

On suppose donc $x \neq 0$ et on introduit $P : t \in \mathbf{R} \longmapsto \|tx+y\|^2$. D'après la proposition 2, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad P(t) = \|tx\|^2 + 2\langle tx,y\rangle + \|y\|^2.$$

Par propriétés sur la norme et le produit scalaire, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad P(t) = \|x\|^2 t^2 + 2\langle x,y\rangle t + \|y\|^2.$$

Comme $x \neq 0$, on a $\|x\| \neq 0$, ainsi P est une fonction polynomiale de degré 2 et, par définition, $P(t) \geq 0$ pour tout réel t. Le discriminant de P est donc négatif, ainsi

$$(2\langle x,y\rangle)^2 - 4\|x\| \, \|y\| \leq 0.$$

On conclut en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_+$.

Cas d'égalité. Si $x = 0$, il y a clairement égalité. On remarque alors que x et y sont colinéaires.

On suppose $x \neq 0$. Supposons que l'inégalité soit une égalité. En reprenant la fonction polynomiale P introduite ci-dessus, son discriminant vaut donc 0 : il existe un (unique) réel t_0 tel que $P(t_0) = \|t_0x+y\|^2 = 0$, soit $t_0x + y = 0$. Les vecteurs x et y sont donc colinéaires.
Réciproquement, si x et y sont colinéaires, il est clair que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité.

□

Exemple 3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel se réécrit en

$$\forall\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

Exemple 4. Si l'on munit $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit en

$$\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \times \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}), \quad \left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Proposition 6. *Inégalité triangulaire.*
Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

L'inégalité triangulaire est une égalité si, et seulement si, $x = 0$ ou s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$.

Démonstration. Comme dans la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sépare la preuve de l'inégalité de la preuve du cas d'égalité.

Inégalité. Soit $(x, y) \in E^2$. D'après la proposition 2, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\langle x, y\rangle \leq \|x\| \|y\|$. Ainsi,

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

La croissance de la fonction racine carrée et la positivité de la norme permet de conclure.

Cas d'égalité. On remarque déjà que l'inégalité triangulaire est une égalité lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.
Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
D'après la preuve ci-dessus, si l'inégalité triangulaire est une égalité, on a $\langle x, y\rangle = \|x\| \|y\|$, en particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité. D'après la proposition 5, les vecteurs x et y sont colinéaires. Comme x et y sont non nuls, il existe un réel λ tel que $y = \lambda x$.
En remplaçant y par λx dans $\langle x, y\rangle = \|x\| \|y\|$, et en utilisant les propriétés usuelles sur le produit scalaire et la norme, on a

$$\lambda \langle x, y\rangle = |\lambda| \|x\| \|y\| .$$

Comme $\langle x, y\rangle = \|x\| \|y\| \neq 0$, on en déduit que $\lambda = |\lambda|$, donc $\lambda \geq 0$.
Réciproquement, si $x = 0$, l'inégalité triangulaire est clairement une égalité. Lorsque $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$, d'une part, on a

$$\|x+y\| = \|(1+\lambda) x\| = |1+\lambda| \|x\| = (1+\lambda) \|x\|$$

car $1 + \lambda \geq 0$. D'autre part, comme $\lambda \geq 0$, on a

$$\|x\| + |y\| = \|x\| + |\lambda x\| = \|x\| + |\lambda| |x\| = \|x\| + \lambda |x\| = (1+\lambda) \|x\| .$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire.

□

Définition 4. *Distance associée à un produit scalaire.*
*La **distance** associée à un produit scalaire sur E est l'application $\mathrm{d} : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ définie par :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \mathrm{d}(x, y) = \|x - y\| .$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs et sous-espaces orthogonaux

Définition 5. *Vecteurs orthogonaux.*
*Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que les vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Exemple 5. Si l'on munit $\mathscr{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ du produit scalaire $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_0^\pi f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$, les vecteurs cos et sin sont orthogonaux car

$$\int_0^\pi \cos(t) \sin(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Proposition 7. *Théorème de Pythagore.*
Soit $(x, y) \in E^2$. Les vecteurs x et y sont orthogonaux si, et seulement si, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 2. On a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad & \Longleftrightarrow \quad \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad \langle x, y\rangle = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux.}
\end{aligned}$$

□

Définition 6. *Sous-espaces orthogonaux.*

*Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **orthogonaux** si*

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Exemple 6. Si $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire $(A, B) \longmapsto \operatorname{Tr}\left(AB^T\right)$, les sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et et $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

La proposition n'est pas toujours facile à manipuler. Lorsque F et G sont de dimension finie, on peut se ramener à montrer l'orthogonalité d'un nombre fini de vecteurs.

Proposition 8. *Orthogonalité en dimension finie.*

Soient F et G deux sous-espaces de dimension finie dont on note respectivement $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_m)$ deux familles génératrices.

Alors, F et G sont orthogonaux si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, $\langle f_i, g_j \rangle = 0$.

Démonstration. On traite séparemment les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Cette implication est claire.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient $x \in F$ et $y \in G$. Comme les familles $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_m)$ sont respectivement génératrices de F et G, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ et $y = \sum_{j=1}^{m} y_j g_j$. Par linéarité à gauche et linéarité à droite, on a alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \langle f_i, g_j \rangle = 0.$$

□

Exemple 7. Dans $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, les sous-espaces vectoriels $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x + y + z = 0\right\}$ et $D = \operatorname{Vect}((1, 1, 1))$ sont orthogonaux.

En effet, on remarque que la famille $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est une base de H et

$$\langle (1, -1, 0), (1, 1, 1) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle (1, 0, -1), (1, 1, 1) \rangle = 0.$$

Ainsi, H et D sont orthogonaux dans $\mathbf{R}^3$.

Définition 7. *Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.*

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On définit $F^\perp$ (lire « F orthogonal ») par

$$F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F,\ \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Proposition 9. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Déjà $F^\perp$ est non vide car il contient clairement le vecteur nul.

Soit u et v deux éléments de $F^\perp$, soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Par linéarité à droite, on a

$$\forall y \in F, \quad \langle y, u + \lambda v \rangle = \langle y, u \rangle + \lambda \langle y, v \rangle = 0$$

car u et v sont dans $F^\perp$. Ainsi, $u + \lambda v \in F^\perp$.

□

Exemple 8. Dans $\mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, on s'intéresse à l'orthogonal de $F = \operatorname{Vect}((1, 2, 0, -1), (1, -1, 1, 0))$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in F^\perp \quad & \iff \quad \begin{cases} \langle (x, y, z, t), (1, 2, 0, -1) \rangle & = 0 \\ \langle (x, y, z, t), (1, -1, 1, 0) \rangle \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x + 2y - t & = 0 \\ x - y + z & = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} t & = x + 2y \\ z & = -x + y \end{cases} \\
& \iff \quad (x, y, z, t) = x(1, 0, -1, 1) + y(0, 1, -1, 2).
\end{aligned}$$

On peut ainsi écrire que $F^\perp = \operatorname{Vect}((1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 2))$.

2.2 Familles orthogonales et orthonormées

Définition 8. *Famille orthogonale.*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille est ***orthogonale*** *si :*

$$\forall (i,j)\in I^2, \quad (i\neq j) \Longrightarrow \left(\left\langle u_i, u_j\right\rangle = 0\right).$$

Définition 9. *Famille orthonormée (ou orthonormale).*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille est ***orthonormée*** *si elle est orthogonale et si tous les vecteurs sont de norme 1, i.e. pour tout $i\in I$, $\|u_i\|=1$.*

Proposition 10. *Toute famille orthogonale de vecteurs* ***non nuls*** *est libre.*

Démonstration. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Soit $J\subset I$ fini. Soit $(\lambda_i)_{i\in J}\in \mathbf{R}^J$ tel que $\sum_{i\in J}\lambda_i u_i = 0$. Soit $k\in J$. En utilisant la linéarité à gauche du produit scalaire, on a

$$0 = \langle 0, u_k\rangle = \left\langle \sum_{i\in J}\lambda_i u_i, u_k\right\rangle = \sum_{i\in J}\lambda_i \langle u_i, u_k\rangle.$$

Comme la famille est orthogonale, on a $0=\lambda_k \|u_k\|^2$, puis comme $u_k\neq 0$, on a $\lambda_k = 0$. Ceci étant vrai pour tout $k\in J$, la famille $(u_i)_{i\in J}$ est libre, ainsi la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

□

Définition 10. *Base orthonormée.*

On dit que $\mathscr{B}$ est une ***base orthonormée*** *de E si $\mathscr{B}$ est une base et orthonormée.*

Remarque 4. L'existence de base orthonormée n'est pas claire même lorsque E est un espace vectoriel euclidien. La prochaine sous-partie donne un procécé « naturel » pour construire des bases orthonormées dans le cas euclidien.

2.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 11. *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une unique famille orthonormée $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ vérifiant :

$$\forall k\in [\![1,p]\!], \quad \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur p.

Lorsque $p=1$. Soit (e_1) une famille libre. Comme $e_1\neq 1$, on peut poser $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|}e_1$.

Par construction, on a $\|\varepsilon_1\|=1$, la famille (ε_1) est orthonormée.

Soit $p\in\mathbf{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang p, montrons qu'elle est vraie au rang $p+1$. Soit $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1})$ une famille libre de E. La sous-famille $(e_1,\dots,e_p)$ est une famille libre de E, par hypothèse de récurrence, il existe une famille orthonormée de E, $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ telle que

$$\forall i\in [\![1,p]\!], \quad \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_i) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p).$$

On cherche ε_{p+1} sous la forme

$$\varepsilon_{p+1} = \lambda_1\varepsilon_1+\dots+\lambda_p\varepsilon_p+\lambda_{p+1}e_{p+1}.$$

La famille $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ est orthonormée, donc

$$\forall k\in [\![1,p]\!], \quad \langle \varepsilon_{p+1},\varepsilon_k\rangle = \lambda_k + \lambda_{p+1}\langle e_{p+1},\varepsilon_k\rangle.$$

Ainsi, la famille $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p,\varepsilon_{p+1})$ est orthonormée si, et seulement si,

$$\forall k\in [\![1,p]\!], \quad \lambda_k = -\lambda_{p+1}\langle e_{p+1},\varepsilon_k\rangle$$

de sorte que si l'on pose

$$\varepsilon_{p+1} = \lambda_{p+1}\left(e_{p+1} - \langle e_{p+1},\varepsilon_1\rangle\,\varepsilon_1 - \dots - \langle e_{p+1},\varepsilon_p\rangle\,\varepsilon_p\right),$$

la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$ est orthogonale.

De plus, $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ est libre, donc $e_{p+1} \notin \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, donc $e_{p+1} \notin \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, donc $\|e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1\rangle \varepsilon_1 - \cdots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p\rangle \varepsilon_p\| \neq 0$. Ainsi, en posant $\lambda_{p+1} = \dfrac{1}{\|e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1\rangle \varepsilon_1 - \cdots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p\rangle \varepsilon_p\|}$, la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$ est orthonormée.

De plus, par construction

$$\varepsilon_{p+1} = \underbrace{\lambda_{p+1}}_{\neq 0} e_{p+1} + \underbrace{\lambda_p e_p + \cdots + \lambda_1 e_1}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)}.$$

Ainsi, on a bien $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$

□

Exemple 9. $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $F = \mathrm{Vect}\,((1,2,0),(1,1,3))$. On cherche une base orthonormée de F.

La famille $((1,2,0),(1,1,3))$ est une famille libre de F, on lui applique le procédé de Gram-Schmidt.

On pose $e_1 = \dfrac{1}{\|(1,2,0)\|}(1,2,0) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$.

On cherche $\widetilde{e_2}$ sous la forme $(1,1,3) + \alpha e_1$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On veut $\langle \widetilde{e_2}, e_1\rangle = 0$. Or, $\langle \widetilde{e_2}, e_1\rangle = \langle (1,1,3), e_1\rangle + \alpha \langle e_1, e_1\rangle = \langle (1,1,3), e_1\rangle + \alpha$ car $\langle e_1, e_1\rangle = \|e_1\|^2 = 1$. On a donc $\alpha = -\langle (1,1,3), e_1\rangle = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\langle (1,1,3),(1,2,0)\rangle = -\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, ce qui donne $\widetilde{e_2} = (1,1,3) - \dfrac{3}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) = \dfrac{1}{5}(2,-1,15)$.

On pose $e_2 = \dfrac{1}{\|\widetilde{e_2}\|}\widetilde{e_2}$. Comme $\|\widetilde{e_2}\| = \dfrac{\sqrt{230}}{5}$, on en déduit finalement que $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{230}}(2,-1,15)$.

Exemple 10. On munit $\mathbf{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$. On cherche une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.

On pose $e_1 = \dfrac{1}{\|1\|}1$. Comme $\|1\| = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t} = \sqrt{2}$, on a $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On cherche $\widetilde{e_2}$ de la forme $\widetilde{e_2} = X + \alpha e_1$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On veut $\langle e_1, \widetilde{e_2}\rangle = 0$. Or, $\langle e_1, \widetilde{e_2}\rangle = \langle e_1, X + \alpha e_1\rangle = \langle e_1, X\rangle + \alpha$ car $\langle e_1, e_1\rangle = 1$. On prend $\alpha = -\langle e_1, X\rangle = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = 0$

On pose finalement $e_2 = \dfrac{1}{\|\widetilde{e_2}\|}\widetilde{e_2}$. Or,

$$\|\widetilde{e_2}\| = \sqrt{\langle \widetilde{e_2}, \widetilde{e_2}\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

On a donc $e_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.

On cherche $\widetilde{e_3} = X^2 + \alpha e_2 + \beta e_1$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. On veut $\langle \widetilde{e_3}, e_1\rangle = \langle \widetilde{e_3}, e_2\rangle = 0$. Or, $\langle \widetilde{e_3}, e_1\rangle = \left\langle X^2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle + \beta$ et $\langle \widetilde{e_3}, e_2\rangle = \left\langle X^2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}X\right\rangle + \alpha$. Il s'ensuit que l'on a $\alpha = 0$ et $\beta = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, soit $\widetilde{e_3} = X^2 - \dfrac{1}{3}$.

On pose finalement $e_3 = \dfrac{1}{\|\widetilde{e_3}\|}\widetilde{e_3}$. Or,

$$\|\widetilde{e_3}\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}.$$

Ainsi, $e_3 = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$.

Corollaire 1. *Existence de bases orthonormées dans le cas euclidien.*
Tout espace vectoriel euclidien admet des bases orthonormées.

Démonstration. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille libre.

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la famille obtenue. Par construction, elle est orthonormale, donc libre. De plus,

$$\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_n) = E,$$

donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice : c'est une base orthonormée de E.

$\square$

Proposition 12. *Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.*

Soit E un espace euclidien dont on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonomée. Pour tout $\left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$, on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \textit{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Remarque 5. Cette proposition assure que dans une base orthonormée le calcul du produit scalaire et de la norme se fait comme dans $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel.

Démonstration. Avec les mêmes notations, on a

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle.$$

Or, $\left\langle e_i, e_j \right\rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1$, donc

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

La relation $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ s'en déduit de la précédente en prenant $y = x$.

$\square$

3 Projection orthogonale

3.1 Projection sur un sous-espace vectoriel

Proposition 13. *Si E est un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E, alors $F \oplus F^{\perp} = E$. En particulier,* $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$.

Démonstration. On procède par analyse/synthèse.

Analyse. Soit $x \in E$. On suppose qu'il existe $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. On écrit alors $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$. Comme $z \in F^{\perp}$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} y_i e_i + z \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} y_i \langle e_i, e_k \rangle + \langle z, e_k \rangle = y_k.$$

On en déduit que $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$ et $z = x - y = x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Synthèse. Si l'on reprend y et z trouvés ci-dessus, il est clair que $y+z=x$. Il est aussi clair que $y \in F$ comme combinaison linéaire d'éléments de F. Vérifions que $z \in F^\perp$.
D'après la proposition 8, il suffit de vérifier que $\langle z, e_j\rangle = 0$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$. En utilisant la On a

$$\begin{aligned}
\langle z, e_j\rangle &= \left\langle x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i, z\right\rangle \\
&= \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, e_j\rangle \\
&= \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

car pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.
Ainsi, $z \in F^\perp$.

□

⚠L'hypothèse de dimension finie est important : si E n'est plus de dimension finie, on a encore $F \cap F^\perp = \{0\}$, mais on a pas, en général, $E = F + F^\perp$.

Définition 11. *Projection orthogonale.*
Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E. La ***projection orthogonale*** *sur F est la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Remarque 6. Si l'on note p_F la projection orthogonale sur F et $P_{F^\perp}$ celle sur $F^\perp$, on a $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{id}_E$.

Proposition 14. *Formule de projection.*
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors,

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Démonstration. On pose g l'endomorphisme de E défini par $g(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$. Pour montrer que $g = p_F$, il suffit de montrer que g et p_F coïncident sur des espaces en somme directe. D'après la proposition 13, on a $F \oplus F^\perp = E$.

- Pour tout $x \in F^\perp$, on a $p_F(x) = 0$ par définition de p_F et $g(x) = 0$ car pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\langle x, e_i\rangle = 0$.
- Pour tout $x \in F$, on a $p_F(x) = x$ et, si l'on écrit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, on a

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p} \left\langle \sum_{j=1}^{p} x_j e_j, e_i \right\rangle e_i = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} x_j \langle e_j, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = x$$

car pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle e_i, e_j\rangle = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

□

Exemple 11. On munit $\mathbf{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Déterminons une expression explicite pour la projection orthogonale sur $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$.

On commence par trouver une base de F. On remarque que les vecteurs $(2,1,0)$ et $(1,0,-1)$ appartiennent à F et sont non colinéaires. De plus, F est un hyperplan de $\mathbf{R}^3$, donc de dimension 2, donc $F = \mathrm{Vect}\left((2,1,0), (1,0,-1)\right)$.

Comme F est de dimension 2 et $F^\perp$ de dimension 1, il semble plus simple d'obtenir une formule pour la projection sur $F^\perp$. Soit $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in F^\perp &\iff \begin{cases}\langle (x,y,z),(2,1,0)\rangle &=0\\ \langle (x,y,z),(2,1,0)\rangle &=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2x+y &=0\\ x-z &=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y &=-2x\\ z &=x\end{cases}\\ &\iff (x,y,z)=x\,(1,-2,1).\end{aligned}$$

Ainsi, $F^\perp=\mathrm{Vect}\left((1,-2,1)\right)$. Il est alors facile de trouver une base orthonormée de $F^\perp$: $\dfrac{1}{\|(1,-2,1)\|}(1,-2,1)=\dfrac{1}{\sqrt6}(1,-2,1)$. Ainsi,

$$\forall (x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\quad p_{F^\perp}(x,y,z)=\left\langle (x,y,z),\frac{1}{\sqrt6}(1,-2,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt6}(1,-2,1)=\frac16(x-2y+z)(1,-2,1).$$

Il s'ensuit que

$$\forall (x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\quad p_F(x,y,z)=(x,y,z)-p_{F^\perp}(x,y,z,)=(x,y,z)-\frac16(x-2y+z)(1,-2,1).$$

3.2 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 12. *Distance à un sous-espace vectoriel.*
La distance d'un vecteur $x\in E$ à un sous-espace vectoriel F de E est la quantité

$$\mathrm{d}(v,F)=\inf_{y\in F}\|x-y\|=\inf_{y\in F}\mathrm{d}(x,y).$$

Proposition 15. *Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.*
Soit $x\in E$ et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors, en notant respectivement p_F et $p_{F^\perp}$ les projections orthogonales sur respectivement F et $F^\perp$, on a

$$\mathrm{d}(x,F)=\|x-p_F(x)\|=\|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Démonstration. Soit $x\in E$. Déjà, on remarque que $x-p_F(x)=p_{F^\perp}(x)\in F^\perp$. Pour tout $y\in F$, on a

$$\|x-y\|^2=\|x-p_F(x)+p_F(x)-y\|^2.$$

Comme $x-p_F(x)\in F^\perp$ et $p_F(x)-y\in F$, le théorème de Pythagore donne

$$\forall y\in F,\quad \|x-y\|^2=\|x-p_F(x)\|^2+\|p_F(x)-y\|^2\geq\|x-p_F(x)\|^2$$

avec égalité, si et seulement si, $y=p_F(x)$.

On en déduit que l'infimum $\inf\limits_{y\in F}\|x-y\|$ est atteint et il atteint si, et seulement si, $y=p_F(x)$.

□

Exemple 12. $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Déterminons la distance de $(1,0,0)$ au sous-espace vectoriel $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x+y+z=0\right\}$.

Il est clair que la famille F est de dimension 2 et que $F=\mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)$. On commence par donner grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une base orthonormée de F.

On pose $e_1=\dfrac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)$. On cherche $\widetilde{e_2}$ sous la forme $(1,0,-1)+\alpha e_1$ avec $\alpha\in\mathbf{R}$. On veut $\langle\widetilde{e_2},e_1\rangle=0$. Or, $\langle\widetilde{e_2},e_1\rangle=\left\langle(1,0,-1),\dfrac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)\right\rangle+\alpha$ car $\langle e_1,e_1\rangle=\|e_1\|^2=1$. Ainsi, $\alpha=-\left\langle(1,0,-1),\dfrac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)\right\rangle=-\dfrac{1}{\sqrt2}$. Il s'ensuit que $\widetilde{e_2}=(1,0,-1)-\dfrac{1}{\sqrt2}\times\dfrac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)=\left(\dfrac12,\dfrac12,-1\right)$.

On pose $e_2 = \dfrac{1}{\|\widetilde{e_2}\|}\widetilde{e_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

En utilisant les propositions 15 et 14, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left((1,0,0), F\right) &= \|(1,0,0) - p_F(1,0,0)\| \\
&= \left\|(1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle (1,-1,0),(1,0,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) - -\frac{1}{\sqrt{6}}\left\langle (1,1,-2),(1,0,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\| \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Le lecteur attentif remarquera que nous nous sommes compliqué la vie ! Il suffisait de déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$, ce qui est simple car $\dim\left(F^{\perp}\right) = 1$. En fait, c'était l'occasion d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une nouvelle fois !

4 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir aux concours.

4.1 Matrice et déterminant de Gram

Dans cette sous-partie, E est un espace préhilbetien réel dont on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire.

Définition 13. *Matrice de Gram.*

Soit $x_1,\ldots,x_n$ une famille de vecteurs de E. On appelle ***matrice de Gram*** *associée aux vecteurs $x_1,\ldots,x_n$, notée $G(x_1,\ldots,x_n)$, la matrice*

$$G(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Remarque 7. Par symétrie du produit scalaire, la matrice $G(x_1,\ldots,x_n)$ est symétrique.

Définition 14. *Déterminant de Gram.*

Soit $x_1,\ldots,x_n$ une famille de vecteurs de E. Le ***déterminant de Gram*** *de la famille $x_1,\ldots,x_n$ est le déterminant de la matrice de Gram $G(x_1,\ldots,x_n)$.*

Proposition 16. *Soit $x_1,\ldots,x_n$ une famille de vecteurs de E.*

$\det(G(x_1,\ldots,x_n)) \neq 0$ *si, et seulement si, la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre.*

Démonstration. On prouve séparemment les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons la famille liée. Quitte à permuter l'ordre de la famille (ce qui multiplie le déterminant par -1), on peut supposer que x_1 est combinaison linéaire de $x_2,\ldots,x_n$: il existe $(\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que $x_1 = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i$.

L'opération $C_1 \longleftarrow C_1 - \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \alpha_i C_i$ montre que $\det(G(x_1,\ldots,x_n)) = \det(G(0,x_2,\ldots,x_n)) = 0$, ce qui est exclu.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\det(G(x_1,\ldots,x_n)) = 0$. L'une des colonnes de $G(x_1,\ldots,x_n)$ est donc combinaison linéaires des autres. Quitte à permuter les colonnes (ce qui ne modifie pas le déterminant car nul), on peut supposer que la première colonne est combinaison linéaire des autres : il existe $(\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que $C_1 = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \alpha_i C_i$.

En particulier, on a

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \langle x_j, x_1\rangle = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \langle x_j, x_i\rangle,$$

soit

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \left\langle x_j, x_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i\right\rangle = 0.$$

Comme la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel qu'elle engendre, on a donc

$$\forall x \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n), \quad \left\langle x, x_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i\right\rangle = 0.$$

En prenant $x = x_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i$, on obtient $\left\|x_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i\right\| = 0$, soit $x_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i$, ce qui est impossible car la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est supposée libre.

□

Proposition 17. *Calcul de la distance à l'aide du déterminant de Gram.*
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension n dont $(x_1,\dots,x_n)$ est une base. Soit $x \in E$. On alors

$$\det(G(x,x_1,\dots,x_n)) = \|x - p_F(x)\|^2 \det(G(x_1,\dots,x_n)) = \mathrm{d}(x,F)^2 \det(G(x_1,\dots,x_n)).$$

Démonstration. On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. Par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$\det(G(x,x_1,\dots,x_n)) = \det(G(x-p_F(x),x_1,\dots,x_n)) + \det(G(p_F(x),x_1,\dots,x_n)).$$

La famille $(p_F(x),x_1,\dots,x_n)$ est liée car elle contient $n+1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, par la proposition 16, on a $\det(G(p_F(x),x_1,\dots,x_n)) = 0$. Or,

$$\det(G(x-p_F(x),x_1,\dots,x_n)) = \begin{vmatrix} \langle x-p_F(x), x-p_F(x)\rangle & \langle x-p_F(x), x_1\rangle & \cdots & \langle x-p_F(x), x_n\rangle \\ \langle x_1, x-p_F(x)\rangle & \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x-p_F(x)\rangle & \langle x_n,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle \end{vmatrix}.$$

Comme $x - p_F(x) \in F^\perp$, on a $\langle x_i, x-p_F(x)\rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, ainsi

$$\det(G(x-p_F(x),x_1,\dots,x_n)) = \begin{vmatrix} \langle x-p_F(x), x-p_F(x)\rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \langle x_n,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve finalement

$$\det(G(x,x_1,\dots,x_n)) = \det(G(x-p_F(x),x_1,x_2,\dots,x_n)) = \|x-p_F(x)\|^2 \det(G(x_1,\dots,x_n)).$$

□

4.2 Polynômes d'Hermite

On se place dans $\mathbf{R}[X]$ que l'on munit du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \quad \langle P,Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

La présence de la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ peut sembler obscure, c'est une convention.

Définition 15. *Polynômes d'Hermite.*

La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de $\mathbf{R}[X]$. En lui appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on récupère une famille $\left(\widetilde{H_k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ orthonormée de $\mathbf{R}[X]$. On construit alors la suite $(H_k)_{k\in\mathbf{N}}$ avec pour tout $k\in\mathbf{N}$, H_k proportionnel à $\widetilde{H_k}$ et unitaire. On a en particulier,

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad \mathrm{Vect}\left(H_0,\ldots,H_n\right)=\mathrm{Vect}\left(\widetilde{H_0},\ldots,\widetilde{H_n}\right)=\mathrm{Vect}\left(1,X,\ldots,X^n\right)=\mathbf{R}_n[X].$$

Remarque 8. La définition assure donc que H_n est de degré n et la suite $(H_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est unique.

Proposition 18. *Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, H_n est scindé sur $\mathbf{R}$ et est à racines simples.*

Démonstration. Soit $n\in\mathbf{N}^*$. On suppose que H_n a r racines, avec $r\in[\![0,n-1]\!]$, en lesquelles H_n change de signe.

Soit $P=\prod_{i=1}^{r}(X-x_i)\in\mathbf{R}_r[X]\subset\mathbf{R}_{n-1}[X]$. Par construction, H_n est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, en particulier, $\langle H_n,P\rangle=0$.

Mais, la fonction $t\longmapsto H_n(t)P(t)$ est, par définition de P, de signe constant et non nulle. Ainsi,

$$\langle H_n,P\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(t)P(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t\neq0,$$

ce qui est exclu.

□

Proposition 19. *Formule de Rodrigues.*

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad H_n(x)=(-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right).$$

Démonstration. Soit $Q_n(x)=(-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2/2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)$.

Il est facile de constater que Q_n est un polynôme unitaire de degré n. Soit $(n,m)\in\mathbf{N}^2$ avec, par exemple, $n<m$. Montrons que $\langle Q_n,Q_m\rangle=0$. Il suffit de prouver que $\langle X^n,Q_m\rangle=0$ pour $n<m$. Or,

$$\langle X^n,Q_m\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^n(-1)^m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left(\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)\mathrm{d}t.$$

Après n intégrations par parties, on a

$$\langle X^n,Q_m\rangle=(-1)^{m-n}\,n!\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^{m-n}}{\mathrm{d}t^{m-n}}\left(\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)\mathrm{d}t=0.$$

On en déduit que la famille $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille de polynômes unitaires avec $\deg(Q_n)=n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Par unicité de la famille, on en déduit que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $H_n=Q_n$.

□

Proposition 20. *Relation de récurrence.*

Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a

$$H_{n+1}-XH_n+nH_{n-1}=0.$$

Démonstration. D'après la proposition 19, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbf{R},\quad H_{n+1}&=(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)\\&=(-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)\\&=(-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2/2}\left(x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)+n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(x\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)\right)\\&=xH_n(x)-nH_{n-1}(x).\end{aligned}$$

□

Proposition 21. *Équation différentielle vérifiée par H_n.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$H_n'' - XH_n' + nH_n = 0.$$

Démonstration. En dérivant la relation obtenue à la proposition 19, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad H_n'(x) = xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

En comparant cette égalité avec celle obtenue à la proposition 20, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad H_n'(x) = nH_{n-1}(x). \tag{1}$$

En dérivant la relation de récurrence obtenue à la proposition 20 et en utilisant (1), on obtient la relation souhaitée.

□