

Chapitre 9 : Exercices

Exercice 1.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ et on définit φ sur E^2 par

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. Calculer les produits scalaires $\varphi(\sin, \cos)$ et $\varphi(\exp, \text{id}_E)$.
3. Calculer les normes $\|\sin\|$, $\|\cos\|$ et $\|\exp\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire φ .
4. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.

Exercice 2.

On pose $E = \mathbf{R}_2[X]$. Soit φ définie sur E^2 par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur E .
2. Calculer $\varphi(X^2 + 1, X^2 + X + 1)$ et $\varphi(2X - 1, X^2 + X + 1)$.
3. Calculer $\|X^2 + 1\|$ et $\|2X + 1\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire φ .

Exercice 3.

Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4.

Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$.

Montrer que $(x + y + z)^2 \leq 17/10$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer que

$$\forall (n, m) \in \mathbf{N}^2, \quad I_{n+m}^2 \leq I_{2n}I_{2m}.$$

Exercice 7.

Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad 2 + \|x + y\|^2 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2).$$

Exercice 8.

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(u, v) \in E^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \|u + tv\| \geq \|u\|.$$

Montrer que u et v sont orthogonaux.

Exercice 9.

Soit \mathbf{R}^4 muni de son produit scalaire usuel. Déterminer l'orthogonal des sous-espaces vectoriels définis par :

$$F = \text{Vect}((1, 1, 0, -1), (1, 0, 2, -1)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8)).$$

Exercice 10.

On reprend les notations de l'exercice 2. On note

$$F = \{P \in \mathbf{R}_2[X], P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \left\{P \in \mathbf{R}_2[X], \int_0^1 P(t) dt = 0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Déterminer une base de F et une base de G .
3. Déterminer l'orthogonal de F et celui de G .
4. Montrer que la famille $(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ est une base orthogonale de E . En déduire une base orthonormée de E .

Exercice 11.

On définit φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$ par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad \varphi(A, B) = \text{Tr}(A^T B).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\text{Tr}(A)^2 \leq n \text{Tr}(A^T A)$. Préciser les cas d'égalité.
3. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \text{Tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Préciser sa dimension.
4. Déterminer F^\perp .

Exercice 12.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel préhilbertien E .

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Montrer qu'il y a égalité lorsque E est euclidien.
3. Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Montrer qu'il y a égalité lorsque E est euclidien.

Exercice 13.

Déterminer une base orthonormée des sous-espaces vectoriels F et G définis à l'exercice 9.

Exercice 14.

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt.$$

Déterminer une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Exercice 15.

On munit \mathbf{R}^3 de son produit scalaire usuel.

- Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale p sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.
- Calculer la distance de $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ au plan P .

Exercice 16.

On munit \mathbf{R}^4 de son produit scalaire usuel.

- Déterminer une expression de la projection orthogonale p de \mathbf{R}^4 sur le sous-espace vectoriel F d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

- Calculer la distance de $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ au sous-espace vectoriel F .

Exercice 17.

On reprend les notations de l'exercice 2.

- Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$.
- Déterminer le projeté orthogonal de $aX^2 + bX + x \in \mathbf{R}_2[X]$ sur $\mathbf{R}_1[X]$.
- Calculer la distance de X^2 à $\mathbf{R}_1[X]$.

Exercice 18.

On reprend les notations de l'exercice 14.

- Déterminer le projeté orthogonal de $X^2 \in \mathbf{R}_2[X]$ sur $\mathbf{R}_1[X]$.

- En déduire la valeur de $\inf_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt$.

Exercice 19.

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R}) \text{ et } f(0) = 0\}$. Soit l'application φ définie sur $E \times E$ par

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

- Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
- En déduire que

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \int_0^1 |f(t)g(t)| dt \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 g^2(t) dt}.$$

- Soit $f \in E$.

(a) Justifier que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \int_0^x f'(t) dt.$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x)| \leq \int_0^1 |f'(t)| dt,$$

puis que

$$\int_0^1 |f'(t)| dt \geq \int_0^1 |f(t)| dt.$$

- Soit $f \in E$. En utilisant le résultat de la question 3 avec f^2 et en utilisant le résultat de la question 2, montrer que

$$\sqrt{\int_0^1 f'^2(t) dt} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}.$$

Exercice 20.

Soit E un espace euclidien dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : pour tout $x \in E$, $f(x)$ est orthogonal à x .

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

2. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)^\perp$.

3. (a) Montrer que 0 est la seule valeur réelle possible pour f .

(b) f est-il diagonalisable ?

4. Soit \mathcal{B} une base obtenue en concaténant une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. Justifier que \mathcal{B} est une base orthonormée de E et déterminer la forme de la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

Exercice 21.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. E est un espace vectoriel de dimension n .

1. On considère, dans cette question seulement, $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Montrer que } \text{Im}(f) \text{ est un hyperplan de } \mathbf{R}^3 \text{ stable par } f.$$

2. On considère, dans cette question seulement, $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de f .

(b) Montrer que $\ker(f - \text{id}_{\mathbf{R}^3})$ est un hyperplan de \mathbf{R}^3 stable par f .

Dans la suite de l'exercice, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n dont on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E et la norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant au moins une valeur propre réelle λ . On se propose de montrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f .

3. On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la transposée de la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

(a) Vérifier que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

(b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

4. (a) Montrer que λ est valeur propre de f^* .

(b) Soit u un vecteur propre de f^* pour la valeur propre λ .

Montrer que $\text{Vect}(u)^\perp$ est un hyperplan de E stable par f .