

# Programme de colle : du 18 janvier au 22 janvier

## 1 Espaces préhilbertiens réels

1. Définition d'un produit scalaire. Exemples.
2. Espace préhilbertien réel, espace euclidien.
3. Norme associée à un produit scalaire. Propriétés de la norme.
4. Identités remarquables, identité de polarisation, identité du parallélogramme.
5. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire.
6. Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore.
7. Sous-espaces orthogonaux.
8. Notions de famille orthogonale et famille orthonormale. Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.
9. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Exemples.
10. Existence des bases orthonormées en dimension finie. Expression du produit scalaire dans une base orthonormée.
11. Rappels sur les projecteurs. Relation  $F \oplus F^\perp = E$  en dimension finie. Projection orthogonale. Relation  $p_F + p_{F^\perp} = \text{id}_E$ .
12. Formule explicite de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel  $F$  lorsque l'on dispose d'une base orthonormée de  $F$ . Exemples.
13. Distance d'un point à un sous-espace vectoriel  $F$ , notée  $d(x, F)$ . Formule explicite :  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$ .