Programme de colle : du 25 janvier au 29 janvier

1 Espaces préhilbertiens réels

1. Définition d'un produit scalaire. Exemples.
2. Espace préhilbertien réel, espace euclidien.
3. Norme associée à un produit scalaire. Propriétés de la norme.
4. Identités remarquables, identité de polarisation, identité du parallélogramme.
5. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire.
6. Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore.
7. Sous-espaces orthogonaux.
8. Notions de famille orthogonale et famille orthonormale. Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.
9. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Exemples.
10. Existence des bases orthonormées en dimension finie. Expression du produit scalaire dans une base orthonormée.
11. Rappels sur les projecteurs. Relation $F \oplus F^{\perp} = E$ en dimension finie. Projection orthogonale. Relation $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{id}_E$.
12. Formule explicite de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F lorsque l'on dispose d'une base orthonormée de F. Exemples.
13. Distance d'un point à un sous-espace vectoriel F, notée $\mathrm{d}(x, F)$. Formule explicite : $\mathrm{d}(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$.

2 Isométries d'un espace euclidien

1. Matrices orthogonales. Définition. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
2. Une matrice de passage entre deux bases orthonormée est une matrice orthogonale.
3. Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$. Matrices orthogonales positives et négatives.
4. Orientation d'un espace euclidien. Bases directes, bases indirectes.
5. Isométrie d'un espace vectoriel euclidien. Une application linéaire est une isométrie si, et seulement si, elle conserve le produit scalaire.
6. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, u est une isométrie de E si, et seulement si, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.
7. Symétrie orthogonale. Ce sont des isométries. Expression de la symétrie orthogonale s_F en fonction du projecteur orthogonal sur F.
8. Classification des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$. Classification des isométries d'un plan euclidien.