

Chapitre 13 : Exercices

Exercice 1.

Soient $a, b > 0$. Soit f l'application f définie sur \mathbf{R}_+^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^2, \quad f(x, y) = \frac{x^a y^b}{x^2 + y^2}.$$

Pour quelles valeurs de (a, b) , f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 2.

On définit la fonction f sur \mathbf{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbf{R}^2 .
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles sur \mathbf{R}^2 ?

Exercice 3.

On définit la fonction f sur \mathbf{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.

Exercice 4.

On définit la fonction f sur \mathbf{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Montrer que f est continue sur \mathbf{R}^2 .

Exercice 5.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Indication : On pourra procéder au changement de variable $(u, v) = (2x + y, 3x + y)$.

Exercice 6.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

Indication : On pourra procéder au changement de variable $(u, v) = (x + y, 2x + 3y)$.

Exercice 7.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Indication : On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 8.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Indication : On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 9.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Indication : On pourra procéder au changement de variable $(u, v) = (x + y, x - y)$.

Exercice 10.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction F définie sur \mathbf{R} par

$$F(t) = f(x + t, y + t) - f(x, y).$$

2. Montrer que la fonction f vérifie la relation

$$\forall (x, y, t) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y)$$

si, et seulement si, f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice 11.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$1. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} \end{cases}; \quad 3. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x + 2y \end{cases}; \quad 4. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x + y \cos(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy) \end{cases}.$$

Exercice 12.

Déterminer les extrema de la fonction $f : T \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ avec $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Exercice 13.

Déterminer les extrema de la fonction $f : [0, \pi/2]^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$.

Exercice 14.

Déterminer les extrema de la fonction $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$.

Exercice 15.

Déterminer les extrema de la fonction $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Exercice 16.

Déterminer les extrema de la fonction $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

Exercice 17.

Soit \mathcal{C} un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur \mathcal{C} ?