Correction du devoir maison 12

Exercice 1.

1. On va montrer que les intégrales $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} P(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ convergent.

   Soit $f : t \longmapsto P(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$. f est continue que $\mathbf{R}$. Par croissance comparée, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|f(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$.

   Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{A}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge. Par comparaison par inégalité des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{A}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge. Par somme, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

   On montre de même que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Notons que si $(P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2$, la question 1 assure que l'intégrale $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge.

   - La symétrie est claire.
   - Soit $(P_1, P_2, Q) \in \mathbf{R}[X]^3$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

   $$\begin{aligned}
   \langle P_1 + \lambda P_2, Q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (P_1 + \lambda P_2)(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t \\
   &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(P_1(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2} + \lambda P_2(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)\mathrm{d}t \\
   &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P_1(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + \lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t \quad \text{par convergence} \\
   &= \langle P_1, Q\rangle + \lambda\langle P_2, Q\rangle.
   \end{aligned}$$

     On a montré que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
   - Par symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à droite.
   - Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, on a :

   $$\langle P, P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

     car $P^2(t) \geq 0$ pour tout réel t et les bornes sont rangées dans l'ordre croissant.
   - Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. Comme $t \longmapsto P(t)^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est positive, continue sur $\mathbf{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 0$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $P(t)^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2} = 0$, soit $P(t) = 0$.
     Le polynôme P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

   On a montré que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

3. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X)$.

   - On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\|1\|}$. Or, $\|1\| = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t} = 1$, d'où $\varepsilon_1 = 1$.

- On pose $\varepsilon_2' = X + \alpha\varepsilon_1$. On cherche $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\langle \varepsilon_2', \varepsilon_1\rangle = 0$. On a

$$\left\langle \varepsilon_2', \varepsilon_1\right\rangle = \langle X + \alpha\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle = \langle X, \varepsilon_1\rangle + \alpha\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle = \langle X, \varepsilon_1\rangle + \alpha.$$

  Or $\langle X, \varepsilon_1\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 0$ (car la fonction $t \longmapsto t\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est impaire), d'où $\alpha = 0$.
  On pose $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\|X\|}X$. Or, une intégration par parties donne :

$$\|X\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t} = 1.$$

  Ainsi, $\varepsilon_2 = X$.

Exercice 2.

1. On vérifie facilement que l'on a $AA^T = \mathrm{I}_3$.
2. On trouve facilement $\det(A) = 1$, donc l'isométrie associée à A est directe.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(A - \mathrm{I}_3) &\iff AX = X \\
&\iff \begin{cases} -x - \sqrt{2}y + z & = 0 \\ \sqrt{2}x - 2y - \sqrt{2}z & = 0 \\ x + \sqrt{2}y - z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x - \sqrt{2}y + z & = 0 \\ -4y & = 0 \end{cases} \quad \text{en faisant } L_2 \longleftarrow L_2 - \sqrt{2}L_1 \text{ et } L_2 \longleftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \begin{cases} x & = z \\ y & = 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\operatorname{Ker}(A - \mathrm{I}_3) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.