Correction du devoir maison 13

Exercice 1.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le calcul du polynôme caractéristique donne $\mathrm{Sp}\,(A) = \{-3, 3\}$. De simples calculs donnent

$$E_3\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{-3}\,(A) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On donne une base orthonormée des sous-espaces propres. On a :

$$E_{-3}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour avoir une base orthonormée de $E_3\,(A)$, on utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose $\varepsilon_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On cherche α tel que $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2' \rangle = 0$. On a

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2' \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha.$$

On pose $\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$\varepsilon_2' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

et on pose

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}\,(-3, 3, 3)$ de sorte que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Exercice 2.

1. Par propriétés sur la transposition, on a $\left(AA^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T$, donc AA^T est symétrique. AA^T est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(AA^T\right)$ et soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ. D'une part, on a :

$$\left\langle AA^T X, X \right\rangle = \left(AA^T X\right)^T X = X^T AA^T X = \left(A^T X\right)^T A^T X = \left\langle A^T X, A^T X \right\rangle = \left\| A^T X \right\|^2.$$

D'autre part, on a :

$$\left\langle AA^T X, X \right\rangle = \langle \lambda X, X \rangle = \lambda \left\| X \right\|^2.$$

On en déduit que

$$\left\|A^T X\right\|^2 = \lambda \|X\|^2 .$$

Comme $\|X\|^2 > 0$, on obtient $\lambda = \dfrac{\|A^T X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

3. On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \operatorname{Ker}\left(A^T\right)$. On a $AA^T X = A0 = 0$, donc $X \in \operatorname{Ker}\left(AA^T\right)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in \operatorname{Ker}\left(AA^T\right)$. On a :

$$0 = \left\langle AA^T X, X\right\rangle = \left(AA^T X\right)^T X = X^T AA^T X = \left(A^T X\right)^T A^T X = \left\langle A^T X, A^T X\right\rangle = \left\|A^T X\right\|^2 .$$

Il s'ensuit que $\|A^T X\| = 0$, d'où par une propriété de la norme, $A^T X = 0$, donc $X \in \operatorname{Ker}\left(A^T\right)$.

On a montré que $\operatorname{Ker}\left(A^T\right) = \operatorname{Ker}\left(AA^T\right)$.

Exercice 3.

Comme A est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^T$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un vecteur propre X_i associé à la valeur propre λ_i. On a :

$$0 = \langle AX_i, X_i\rangle = \langle \lambda_i X, X\rangle = \lambda_i \|X\|^2 .$$

Comme $X \neq 0$, $\|X\|^2 > 0$, donc $\lambda_i = 0$. Il s'ensuit que $D = 0$, puis $A = PDP^T = 0$.