Correction du DM 14

Exercice 1.

1. - On remarque que f est paire, donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $b_n = 0$.
   - On a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right). \end{aligned}$$

   - Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right) \cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right) \cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{car } t \longmapsto \left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right) \cos(nt) \text{ est paire} \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}n)t} + \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}n)t}\right) \mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}n)t}}{1+in} + \frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}n)t}}{-1+in}\right]_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n - 1}{1+in} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n - 1}{-1+in}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{\left(\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n - 1\right)(-1+\mathrm{i}n) + \left(\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n - 1\right)(1+\mathrm{i}n)}{(1+\mathrm{i}n)(-1+\mathrm{i}n)}\right) \\ &= \frac{2 \times (-1)^n}{\pi} \times \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}. \end{aligned}$$

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbf{R}$. Le théorème de Dirichlet assure que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \widetilde{f}(t) = f(t) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2} \cos(nt).$$

   - On évalue en $t = \pi$ la relation précédente, on a

$$f(\pi) = \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2} \cos(n\pi) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}.$$

   Après simplifications, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}}{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

- On évalue en $t=0$ la relation précédente, on a

$$f(0)=2=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}\cos(0)=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}.$$

  Après simplifications, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}=\frac{\pi}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}-\frac{1}{2}.$$

Exercice 2.

1. - On a :

$$a_0(f')=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left[f(t)\right]_0^{2\pi}=0.$$

   - Soit $n\in\mathbf{N}^*$. On a :

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

     On fait une intégration par parties. On pose $u:t\longmapsto f(t)$ et $v:t\longmapsto\cos(nt)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[,0,2\pi]$, on a :

$$a_n(f')=\frac{1}{\pi}\left(\left[f(t)\cos(nt)\right]_0^{2\pi}+n\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)=nb_n(f).$$

   - Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Une intégration par parties donne aussi $b_n(f')=-na_n(f)$.

2. Comme $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t=0$, on remarque que $a_0(f)=0$.

   f' est 2π-périodique et continue par morceaux, la formule de Parseval donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)^2\,\mathrm{d}t &= a_0(f')^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f')^2+b_n(f')^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\left(a_n(f)^2+b_n(f)^2\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2+b_n(f)^2\right)\quad\text{car } n^2\geq 1\\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)^2\,\mathrm{d}t\quad\text{d'après l'égalité de Parseval pour } f.\end{aligned}$$

   On en déduit donc que

$$\int_0^{2\pi}f'(t)^2\,\mathrm{d}t\geq\int_0^{2\pi}f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

3. On procède par analyse/synthèse.

   - *Analyse.* Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité dela question 2. En particulier, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\left(a_n(f)^2+b_n(f)^2\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2+b_n(f)^2\right)\iff\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2-1\right)\left(a_n(f)^2+b_n(f)^2\right)=0.$$

     Or, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $\left(n^2-1\right)\left(a_n(f)^2+b_n(f)^2\right)\geq 0$. Une somme de réels positifs est nul si, et seulement si, tous les termes de la sommes sont nuls. Il s'ensuit que l'on a : pour tout $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, $\left(n^2-1\right)\left(a_n(f)^2+b_n(f)^2\right)=0$, soit $a_n(f)=b_n(f)=0$.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc continue, et 2π-périodique, le théorème de Dirichlet assure que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \widetilde{f}(t) = f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right).$$

Or, $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 2$, on a donc :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = a_1(f)\cos(t) + b_1(f)\sin(t).$$

- *Synthèse.* Réciproquement, on vérifie facilement que s'il existe $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = a\cos(t) + b\sin(t),$$

alors on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)^2 \,\mathrm{d}t$.