Correction du devoir surveillé numéro 4

Problème 1

1. C'est une question de cours.
2. (a) C'est une intégration par parties.

   (b) On procède par récurrence et, pour $n \in \mathbf{N}$, on introduit $\mathscr{P}_n$: « $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ » converge.

   D'après la question 1, $\mathscr{P}_0$ est vraie. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. D'après la question 2 (a), pour tout $A \geq 0$, on a :

   $$\int_0^A t^{n+1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = -A^{n+1} \mathrm{e}^{-A} + (n+1) \int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

   Par croissance comparée, on a $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^{n+1} \mathrm{e}^{-A} = 0$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

   On en déduit que la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_0^A t^{n+1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$ et on a :

   $$\int_0^{+\infty} t^{n+1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

3. On procède par récurrence et, pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $I_n = n!$ ».
   D'après la question 1, $\mathscr{P}_0$ est vraie. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie. D'après la question 2 (b), on a $I_{n+1} = (n+1)\, n!$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $I_n = n!$, donc $I_{n+1} = (n+1)!$, ce qui prouve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.
4. Comme P et Q sont des polynômes, PQ est un polynôme, donc s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions $t \longmapsto t^n$ avec $n \in \mathbf{N}$. Par linéarité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ converge.
5. On vérifie les différents points de la définition d'un produit scalaire.
   - La symétrie est claire.
   - Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes de $\mathbf{R}_3[X]$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

     $$\begin{aligned}
     \langle P_1 + \lambda P_2, Q \rangle &= \int_0^{+\infty} (P_1 + \lambda P_2)(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \\
     &= \int_0^{+\infty} (P_1(t) + \lambda P_2(t))\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \\
     &= \int_0^{+\infty} \left(P_1(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} + \lambda P_2(t)\, Q(t)\right) \mathrm{d}t \\
     &= \int_0^{+\infty} P_1(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t + \lambda \int_0^{+\infty} P_2(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \quad \text{car les intégrales convergent} \\
     &= \langle P_1, Q \rangle + \lambda \langle P_2, Q \rangle.
     \end{aligned}$$

     $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.
   - $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, linéaire à gauche, donc est linéaire à droite.

- Soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$. On a bien $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \geq 0$.
- Soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0$. Comme $t \longmapsto P^2(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, +\infty[$. Il s'ensuit que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $P^2(t)\,\mathrm{e}^{-t} = 0$, soit $P(t) = 0$. P admet une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

6. Il est clair que si $P \in \mathbf{R}_3[X]$, alors $\Phi(P) \in \mathbf{R}_3[X]$. La linéarité est facile à établir.
7. On a facilement
$$\Phi(1) = 0,\ \Phi(X) = -X + 1,\ \Phi\left(X^2\right) = -2X^2 + 4X \text{ et } \Phi\left(X^3\right) = -3X^3 + 9X^2,$$
ainsi la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
8. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est triangulaire, donc le spectre de Φ se lit sur la diagonale de la matrice, ainsi $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{0, -1, -2, -3\}$.
Φ est diagonalisable car Φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 4 et a 4 valeurs propres deux à deux distinctes.
9. On peut éviter de faire des calculs (donc, on s'en prive pas !). Il suffit de bien exploiter le résultat de la question 7.
   - Comme $\Phi(1) = 0 = 0 \times 1$, on a : $E_0(\Phi) = \mathrm{Vect}(1)$. Le polynôme 1 est bien unitaire.
   - On a : $\Phi(X - 1) = \Phi(X) - \Phi(1) = -X + 1 = -(X - 1)$.
   Comme $E_{-1}(\Phi)$ est de dimension 1, on en déduit que $E_{-1}(\Phi) = \mathrm{Vect}(X - 1)$. Le polynôme $X - 1$ est bien unitaire.
   - En utilisant la matrice (et en faisant quelques calculs au brouillon), on remarque que :
   $$\Phi\left(X^2 - 4X + 2\right) = \Phi\left(X^2\right) - 4\Phi(X) + 2\Phi(1) = -2X^2 + 4X + 4(X - 1) = -2\left(X^2 - 4X + 2\right).$$
   Comme $E_{-2}(\Phi)$ est de dimension 1, on en déduit que $E_{-2}(\Phi) = \mathrm{Vect}\left(X^2 - 4X + 2\right)$. Le polynôme $X^2 - 4X + 2$ est bien unitaire.
10. (a) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et
$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}_+, \quad f'(t) &= P'(t)\,\mathrm{e}^{-t} + tP''(t)\,\mathrm{e}^{-t} - tP'(t)\,\mathrm{e}^{-t} \\ &= \mathrm{e}^{-t}\left((1 - t)\,P'(t) + tP''(t)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-t}\Phi(f)(t). \end{aligned}$$
    (b) En utilisant le résultat de la question 10 (a), on a :
$$\langle \Phi(P), Q\rangle = \int_0^{+\infty} \Phi(P)(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f'(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
    (c) Soit $A \geq 0$. On fait une intégration par parties. Les fonctions $t \longmapsto te^{-t}\Phi(f)(t) = f(t)$ et $t \longmapsto Q(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et la formule d'intégration par parties donne
$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t &= [f(t)\,Q(t)]_0^A - \int_0^A f(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(A)\,Q(A) - \int_0^A tP'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A)\,Q(A) = 0$ et par convergence de l'intégrale, on a :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A tP'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tP'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

D'après la question 10 (b), on a $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t = \langle\Phi(P)\,,Q\rangle$, il s'ensuit que

$$\langle\Phi(P)\,,Q\rangle = -\int_0^A tP'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

(d) En utilisant le résultat de la question 10 (c) avec les polynômes Q et P, on a :

$$\langle\Phi(Q)\,,P\rangle = -\int_0^A tQ'(t)\,P'(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Il s'ensuit que l'on a $\langle\Phi(P)\,,Q\rangle = \langle P,\Phi(Q)\rangle$.

11. D'après la question 10 (d), on a : $\left\langle P_i,\Phi(P_j)\right\rangle = \left\langle\Phi(P_i)\,,P_j\right\rangle$.
Or, $\Phi(P_i) = -iP_i$ et $\Phi(P_j) = -jP_j$, on en déduit donc $\left\langle P_i,-jP_j\right\rangle = \left\langle -iP_i,P_j\right\rangle$. En utilisant la linéarité à gauche et à droite, on obtient : $(i-j)\left\langle P_i,P_j\right\rangle = 0$.
Comme $i-j\neq 0$ (car $i\neq j$), on a $\left\langle P_i,P_j\right\rangle = 0$.
12. La famille (P_0,P_1,P_2) est libre car orthogonale et contenant par le polynôme nul (car les polynômes sont unitaires).
Cette famille est libre dans $\mathbf{R}_3[X]$ et est de cardinal $4 = \dim(\mathbf{R}_3[X])$, donc elle forme une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Problème 2

1. C'est clair.
2. (a) C'est un simple calcul.
   (b) Il suffit de développer l'identité remarquable et remarquer que $\langle AX,X\rangle \geq 0$ comme somme de deux carrés.
3. Un simple calcul donne $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 14$. Le discriminant Δ vaut $8 > 0$. Les valeurs propres de A sont donc $\dfrac{8-\sqrt{8}}{2} = 4-\sqrt{2}$ et $\dfrac{8+\sqrt{8}}{2} = 4+\sqrt{2}$. On remarque que les deux valeurs propres sont positives.
4. Le théorème spectral assure que tout matrice symétrique réelle A est diagonalisable en base orthonormée, autrement, il existe D diagonale et $P\in\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telles que $A = PDP^T$.
5. (a) X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
   (b) On a $\langle AX,X\rangle = \langle\lambda X,X\rangle = \lambda\langle X,X\rangle = \lambda\|X\|^2$. On en déduit donc que $\lambda = \dfrac{\langle AX,X\rangle}{\|X\|^2} \geq 0$.
6. (a) Le théorème spectral assure qu'il existe $P\in\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ telles que $A = PDP^T$. Comme $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathbf{R}_+$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_i\geq 0$.
   (b) On a

$$\langle AX,X\rangle = \left\langle PDP^TX,X\right\rangle = \left(PDP^TX\right)^T X = X^TPD^TP^TX = Y^TDY = \langle DY,Y\rangle\,.$$

   (c) Un simple calcul donne $\langle DY,Y\rangle = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$ car c'est une somme de réels positifs. Il s'ensuit que $\langle AX,X\rangle\geq 0$, donc $A\in\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$.