Correction du devoir surveillé numéro 4

Exercice 1.

1. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on trouve que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right)$ est une base orthonormée de G.
2. D'après la formule de la projection orthogonale, on a :
$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad p_G(x,y,z) &= \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) + \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1) \\ &= \frac{1}{2}(x+z)(1,0,1) + \frac{1}{6}(-x+2y+z)(-1,2,1). \end{aligned}$$
3. D'après le cours, on sait que :
$$\mathrm{d}((1,1,1), G) = \|(1,1,1) - p_G(1,1,1)\| = \left\| \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\| = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$
4. On a $p_{G^\perp}(1,1,1) = (1,1,1) - p_G(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Problème 1

1. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.
2. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.
3. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.
4. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.
5. Soit $h \in \mathbf{H}$ non nul : il existe quatre réels a, b, c et d non tous nuls tels que $h = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. D'après la question 4, on a
$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\mathbf{1}.$$
Comme $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, on a
$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k})\right) = \mathbf{1}.$$
Si l'on pose $h' = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k})$, on a bien $hh' = h'h = \mathbf{1}$.
6. (a) Il est clair que pour tout $(z,z') \in \mathbf{C}^2$, on a
$$f(z+z') = f(z) + f(z'), \quad f(zz') = f(z)f(z')$$
et
$$f(1) = \mathbf{1}.$$
(b) Soient z et z' deux complexes tels que $\varphi(z) = \varphi(z')$. Par définition de φ, on a :
$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z'),$$
d'où $z = z'$.
$\boxed{\text{On a montré que } \varphi \text{ est injective.}}$

7. (a) On pose $u = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ et $v = a' + b'\,\mathrm{i} + c'\,\mathrm{j} + d'\,\mathrm{k}$ avec $((a,b,c,d),(a',b',c',d')) \in \left(\mathbf{R}^4\right)^2$. Un calcul un peu fastidieux donne

$$\begin{aligned} uv &= \left(aa' - bb' - cc' - dd'\right) + \left(ab' + ba' + cd' - dc'\right)\mathrm{i} \\ &\quad + \left(ac' + ca' - bd' + db'\right)\mathrm{j} + \left(da' + ad' + bc' - cb'\right)\mathrm{k}\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |uv|^2 &= \left(aa' - bb' - cc' - dd'\right)^2 + \left(ab' + ba' + cd' - dc'\right)^2 \\ &\quad + \left(ac' + ca' - bd' + db'\right)^2 + \left(da' + ad' + bc' - cb'\right)^2. \end{aligned}$$

Soit, en développant et en remarquant que les doubles produits s'annulent :

$$\begin{aligned} |uv|^2 &= a^2\left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2\right) + b^2\left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2\right) \\ &\quad + c^2\left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2\right) + d^2\left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2\right) \\ &= |u|^2\,|v|^2 \end{aligned}$$

Par positivité de la norme, on en déduit $|uv| = |u|\,|v|$.

$\boxed{\text{On a montré que pour tout } (u,v) \in \mathbf{H}^2,\ |uv| = |u|\,|v|.}$

(b) Si l'on pose $u = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$, il est clair que

$$\boxed{\overline{\overline{u}} = \overline{a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}} = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} = u.}$$

(c) On pose $u = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ et $v = a' + b'\,\mathrm{i} + c'\,\mathrm{j} + d'\,\mathrm{k}$ avec $((a,b,c,d),(a',b',c',d')) \in \left(\mathbf{R}^4\right)^2$ et on reprend le calcul fait à la question 7 (a). On a

$$\begin{aligned} uv &= \left(aa' - bb' - cc' - dd'\right) + \left(ab' + ba' + cd' - dc'\right)\mathrm{i} \\ &\quad + \left(ac' + ca' - bd' + db'\right)\mathrm{j} + \left(da' + ad' + bc' - cb'\right)\mathrm{k}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{uv} &= \left(aa' - bb' - cc' - dd'\right) - \left(ab' + ba' + cd' - dc'\right)\mathrm{i} \\ &\quad - \left(ac' + ca' - bd' + db'\right)\mathrm{j} - \left(da' + ad' + bc' - cb'\right)\mathrm{k}\,. \end{aligned}$$

De plus, en développant, on a

$$\begin{aligned} \overline{v}\,\overline{u} &= \left(a' - b'\,\mathrm{i} - c'\,\mathrm{j} - d'\,\mathrm{k}\right)\left(a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}\right) \\ &= \left(aa' - bb' - cc' - dd'\right) - \left(ab' + ba' + cd' - dc'\right)\mathrm{i} \\ &\quad - \left(ac' + ca' - bd' + db'\right)\mathrm{j} - \left(da' + ad' + bc' - cb'\right)\mathrm{k}\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a montré que pour tout } (u,v) \in \mathbf{H}^2,\ \overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}.}$

(d) On pose $u = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$. Un simple développement donne

$$\begin{aligned} u\overline{u} &= \left(a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}\right)\left(a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}\right) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= |u|^2\,. \end{aligned}$$

Un calcul analogue donne $\overline{u}u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |u|^2$.

$\boxed{\text{On a montré que pour tout } u \in \mathbf{H},\ u\overline{u} = \overline{u}u = |u|^2.}$

8. Soit $p = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$. On remarque que

$$u \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}} \iff u + \overline{u} = 0.$$

Soit $x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$. D'après la question 7 (c), on a

$$ux\overline{u} + \overline{ux\overline{u}} = ux\overline{u} + \overline{\overline{u}}\,\overline{x}\,\overline{u}.$$

Comme $\overline{\overline{u}} = u$ (question 7 (b)), on a

$$ux\overline{u} + \overline{ux\overline{u}} = ux\overline{u} + u\overline{x}\,\overline{u} = u\left(x + \overline{x}\right)\overline{u}.$$

Or, $x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, d'après la remarque faite ci-dessus, $x + \overline{x} = 0$, on en déduit donc $ux\overline{u} + \overline{ux\overline{u}} = 0$. Toujours d'après la remarque fait ci-dessus, on en déduit que

$$\boxed{\forall u \in \mathbf{U},\ \forall x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}, \quad ux\overline{u} \in \mathbf{H}^{\text{pur}}.}$$

9. Soit $u \in \mathbf{U}$. Soient $(p_1, p_2) \in \mathbf{H}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

$$\Psi_u\left(p_1 + \lambda p_2\right) = u\left(p_1 + \lambda p_2\right)\overline{u} = up_1\overline{u} + u\lambda p_2\overline{u}.$$

Comme $\lambda \in \mathbf{R}$, il est facile de voir que λ et u commutent (attention, cela est faux si $\lambda \in \mathbf{H}$...), ainsi

$$\Psi_u\left(p_1 + \lambda p_2\right) = up_1\overline{u} + \lambda up_2\overline{u} = \Psi_u\left(p_1\right) + \lambda\Psi_u\left(p_2\right).$$

$\boxed{\text{On a montré que, pour tout } u \in \mathbf{U},\ \Psi_u \text{ est } \mathbf{R}\text{-linéaire.}}$

10. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. On a déjà remarqué à la question 9 que u et x commutent. En utilisant le résultat de la question 7 (d), on a

$$\Psi_u\left(x\right) = ux\overline{u} = xu\overline{u} = x\left|u\right|^2 \in \mathbf{R}.$$

$\boxed{\text{On a montré que } \Psi_u \text{ laisse stable } \mathbf{R}.}$

(b) D'après la question 1, si $x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, alors

$$\Psi_u\left(x\right) = ux\overline{u} \in \mathbf{H}^{\text{pur}}.$$

$\boxed{\text{On a montré que } \Psi_u \text{ laisse stable } \mathbf{H}^{\text{pur}}.}$

11. On a

$$\begin{aligned}\psi_u\left(\mathrm{i}\right) &= \left(a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}\right)\mathrm{i}\left(a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}\right)\\ &= \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)\mathrm{i} + 2\left(ad + bc\right)\mathrm{j} + 2\left(bd - ac\right)\mathrm{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_u\left(\mathrm{j}\right) &= \left(a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}\right)\mathrm{j}\left(a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}\right)\\ &= 2\left(bc - ad\right)\mathrm{i} + \left(a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right)\mathrm{j} + 2\left(ab + dc\right)\mathrm{k}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi_u\left(\mathrm{k}\right) &= \left(a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}\right)\mathrm{k}\left(a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}\right)\\ &= 2\left(ac + bd\right)\mathrm{i} + 2\left(dc - ab\right)\mathrm{j} + \left(a^2 - b^2 - c^2 + d^2\right)\mathrm{k}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}A_u &= \mathrm{mat}_{(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})}\left(\psi_u\right)\\ &= \boxed{\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2\left(bc - ad\right) & 2\left(ac + bd\right)\\ 2\left(ad + bc\right) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2\left(dc - ab\right)\\ 2\left(bd - ac\right) & 2\left(ab + dc\right) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2\end{pmatrix}.}\end{aligned}$$

12. Pour vérifier que $A_u \in \mathscr{O}_3\left(\mathbf{R}\right)$, il suffit de vérifier que ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{3,1}\left(\mathbf{R}\right)$ muni de son produit scalaire canonique.

- On montre que les colonnes sont de norme 1. On montre pour la première colonne est de norme 1, les autres colonnes se traitent de manière analogue. On rappelle que l'on a

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1 \iff a^2+b^2=1-\left(c^2+d^2\right)$$

car $u \in \mathbf{U}$. On a

$$\begin{aligned}
& \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+4\,(ad+bc)^2+4\,(bd-ac)^2 \\
= \quad & \left(1-2\left(c^2+d^2\right)\right)^2+4\left(a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+a^2c^2\right) \\
= \quad & \left(1-2\left(c^2+d^2\right)\right)^2+4\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \\
= \quad & \left(1-2\left(c^2+d^2\right)\right)^2+4\left(1-\left(c^2+d^2\right)\right)\left(c^2+d^2\right) \\
= \quad & 1-4\left(c^2+d^2\right)+4\left(c^2+d^2\right)^2+4\left(c^2+d^2\right) \\
& -4\left(c^2+d^2\right)^2 \\
= \quad & \boxed{1.}
\end{aligned}$$

- On montre que les colonnes forment une famille orthogonale de $\mathscr{M}_{3,1}\left(\mathbf{R}\right)$. On montre que le produit scalaire de deux colonnes distinctes vaut 0. On calcule uniquement le produit scalaire de la première et de la deuxième colonnes, le produit scalaire des autres colonnes se calcule de manière analogue. **Sans** utiliser la relation $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, on a

$$\begin{aligned}
& 2\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)(bc-ad) \\
& +2\,(ad+bc)\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)+4\,(bd-ac)\,(ab+dc) \\
= \quad & 2\left(a^2bc-a^3d+b^3c-ab^2d-bc^3+ac^2d-bcd^2+ad^3\right) \\
& +2\left(a^3d-ab^2d+ac^2d-ad^3+ab^2c-b^3c\right. \\
& \left.+\,bc^3-bc^2d\right)+4\left(ab^2d+bcd^2-a^2bc-ac^2d\right) \\
= \quad & \boxed{0.}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a montré que pour tout } u \in \mathbf{U},\ A_u \in \mathscr{O}_3\left(\mathbf{R}\right).}$

13. (a) On remarque que si $t=0$ ou $t=1$, alors $tu+(1-t)$ est non nul. Pour tout $t \in \left]0,1\right[$, on a

$$\begin{aligned}
|tu+(1-t)|=0 \quad & \iff \quad tu+(1-t)=0 \\
& \iff \quad u=\frac{t-1}{t} \\
& \implies \quad u \in \mathbf{R}_-.
\end{aligned}$$

Or, il est facile de voir que $\mathbf{R}_- \cap \mathbf{U}=\{-1\}$. On en déduit que pour tout $t \in [0,1]$, $|tu+(1-t)| \neq 0$, ainsi γ est définie sur $[0,1]$.
Pour tout $t \in [0,1]$, d'après la question 7 (a), on a

$$|\gamma\,(t)|=\left|\frac{tu+(1-t)}{|tu+(1-t)|}\right|=\frac{1}{||tu+(1-t)||}\,|tu+(1-t)|=1,$$

car $||tu+(1-t)||=|tu+(1-t)|$, pour tout $t \in [0,1]$.

$\boxed{\text{On a montré que } \gamma \text{ est bien définie et pour tout } t \in [0,1],\ \gamma\,(t) \in \mathbf{U}.}$

(b) D'après la question 12, pour tout $t \in [0,1]$, $A_{\gamma(t)} \in \mathscr{O}_3\left(\mathbf{R}\right)$ (car $\gamma\,(t) \in \mathbf{U}$).

$\boxed{\text{Or, le déterminant d'une matrice orthogonale vaut } \pm 1 \text{, ainsi pour tout } t \in [0,1],\ \det\left(A_{\gamma(t)}\right) \in \{-1,1\}.}$

(c) On pose $u = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \frac{tu + (1-t)}{|tu + (1-t)|} \\
&= \frac{ta + (1-t) + tb\,\mathrm{i} + tc\,\mathrm{j} + td\,\mathrm{k}}{|ta + (1-t) + tb\,\mathrm{i} + tc\,\mathrm{j} + td\,\mathrm{k}|} \\
&= \frac{ta + (1-t) + tb\,\mathrm{i} + tc\,\mathrm{j} + td\,\mathrm{k}}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}} \\
&= a(t) + b(t)\,\mathrm{i} + c(t)\,\mathrm{j} + d(t)\,\mathrm{k}
\end{aligned}$$

où les fonctions a, b, c et d sont définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ par :

$$a(t) = \frac{ta + 1 - t}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}},$$

$$b(t) = \frac{tb}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}},$$

$$c(t) = \frac{tc}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}}$$

et

$$d(t) = \frac{td}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}}.$$

Les fonctions a, b, c et d sont de toute évidence continues sur $[0,1]$. Il s'ensuit que les coefficients de $A_{\gamma(\cdot)} = (a_{i,j}(\cdot))^2_{(i,j)\in[\![1,3]\!]}$ sont continues et ce, d'après le calcul de la matrice A_u fait à la question 11. On en déduit que

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi(t) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_3} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{3} a_{i,\sigma(i)}(t).$$

En particulier, φ est continue sur $[0,1]$ comme la somme de produits de fonctions continues sur $[0,1]$.
Comme φ est à valeurs dans $\{-1,1\}$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que φ est constante sur $[0,1]$. Or ,

$$\varphi(0) = \det(\mathrm{I}_3) = 1$$

car $\Psi_1 = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$.
Finalement, φ est constante égale à 1, en particulier,

$$\boxed{\varphi(1) = \det(A_u) = 1.}$$

(d) On remarque que $\Psi_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, ainsi $\det(A_{-1}) = 1$. On a montré que

$$\boxed{\forall u \in \mathbf{U}, \quad \det(A_u) = 1.}$$

14. On a

$$\begin{aligned}
|u| &= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + a^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + b^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + c^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (a^2+b^2+c^2)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Or, (a,b,c) est de norme égale à 1, donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ainsi

$$\boxed{|u| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1.}$$

15. Par définitions de u et u', on a $u = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) u'$, puis comme $u' \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, il vient que $\overline{u} = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) u'$. Ainsi

$$\begin{aligned}\Psi_u(u') &= uu'\overline{u} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) u' \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) u'.\end{aligned}$$

Or, d'après la question 7 (d),

$$\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) = |u|\,.$$

La question 14 assurant que $|u| = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\Psi_u(u') = u'.}$$

16. (a) On a

$$\Psi_u(v) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) v \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right).$$

$\boxed{\text{En développant ce produit, on a l'égalité souhaitée.}}$

(b) On prouve séparemment les deux égalités.

- On a

$$\begin{aligned}u'vu' &= (a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{k})\left(a'\,\mathrm{i} + b'\,\mathrm{j} + c'\,\mathrm{k}\right)(a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{k}) \\ &= \left(-aa' + ab'\,\mathrm{k} - ac'\,\mathrm{j} - a'b\,\mathrm{k} - bb' + bc'i + ca'\,\mathrm{j}\right. \\ &\quad \left. - cb'\,\mathrm{i} - cc'\right)(a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{k}) \\ &= \left(ab'\,\mathrm{k} - ac'\,\mathrm{j} - a'b\,\mathrm{k} + bc'i + ca'\,\mathrm{j} - cb'\,\mathrm{i}\right) \\ &\quad \times (a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{k}),\end{aligned}$$

car $aa' + bb' + cc' = 0$ car les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') sont orthogonaux. En développant à nouveau, on obtient

$$\begin{aligned}& u'vu' \\ =\ & a^2b'\,\mathrm{j} - abb'\,\mathrm{i} - abc' + a^2c'\,\mathrm{k} + abc' - acc'\,\mathrm{i} - aa'b\,\mathrm{j} \\ & + a'b^2\,\mathrm{i} + a'bc - abc' + b^2c'\,\mathrm{k} - bcc'\,\mathrm{j} - aa'c\,\mathrm{k} - a'bc \\ & + a'c^2\,\mathrm{i} + ab'c - bb'c\,\mathrm{k} + b'c^2\,\mathrm{j} \\ =\ & \left(-abb' - acc' + a'b^2 + a'c^2\right)\mathrm{i} \\ & + \left(a^2b' - aa'b - bcc' + b'c^2\right)\mathrm{j} \\ & + \left(a^2c' + b^2c' - aa'c - bbc\right)\mathrm{k}\,.\end{aligned}$$

Or, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, donc

$$\begin{aligned}-abb' - acc' + a'b^2 + a'c^2 &= -abb' - acc' + a'\left(1 - a^2\right) \\ &= a' - a\left(aa' + bb' + cc'\right) \\ &= a'\end{aligned}$$

car $aa' + bb' + cc' = 0$.

On montre de même que

$$a^2b' - aa'b - bcc' + b'c^2 = b' \quad \text{et} \quad a^2c' + b^2c' - aa'c - bbc = c',$$

ainsi

$$\boxed{-u'vu' = -v.}$$

- La deuxième relation ne demande pas de calculs. On rappelle que $u' \in \mathbf{U} \cap \mathbf{H}^{\text{pur}}$, donc $u'\overline{u'} = 1$ ($u' \in \mathbf{U}$) et $\overline{u'} = -u'$ ($u' \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$). On a :

$$\boxed{vu' = u'\overline{u'}vu' = u'\left(-u'vu\right) = u'\left(-v\right) = -u'v.}$$

(c) En remplaçant les relations obtenues à la question 16 (b) dans l'expression de $\Psi_u\left(v\right)$ de la question 16 (a), on a

$$\begin{aligned}
\Psi_u\left(v\right) &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)v + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(u'v - vu'\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)u'vu' \\
&= \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)v + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u'v \\
&= \boxed{\cos\left(\theta\right)v + \sin\left(\theta\right)u'v.}
\end{aligned}$$

(d) Le produit vectoriel $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$ est le vecteur

$$\boxed{\left(bc' - b'c, -ac' + a'c, ab' - a'b\right).}$$

Un simple calcul donne

$$\begin{aligned}
u'v &= \left(a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{k}\right)\left(a'\,\mathrm{i} + b'\,\mathrm{j} + c'\,\mathrm{k}\right) \\
&= \boxed{\left(bc' - b'c\right)\mathrm{i} + \left(-ac' + a'c\right)\mathrm{j} + \left(ab' - a'b\right)\mathrm{k}\,.}
\end{aligned}$$

(e) Comme ψ_u est une rotation, on a

$$\boxed{\Psi_u\left(u'v\right) = -\sin\left(\theta\right)v + \cos\left(\theta\right)u'v.}$$

17. On pose $w = (a, b, c) \wedge (a', b', c')$.

D'après les questions 16 (d) et 16 (e), ψ_u est la rotation d'axe dirigé par le vecteur (a, b, c) et d'angle θ.