Devoir surveillé numéro 4 type Centrale

Mercredi 3 février

Exercice 1.

On munit $\mathbf{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Soit $G = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$.

1. Donner une base orthonormée de G.
2. En déduire une expression explicite de la projection orthogonale p_G sur G.
3. En déduire $\mathrm{d}((1,1,1), G)$.
4. Sans calcul supplémentaire, donner le projeté orthogonal de $(1,1,1)$ sur $G^\perp$.

Problème

Partie 1 : Construction du corps des quaternions

Définition 1. *Quaternions.*
Soient les matrices

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

*On définit l'**ensemble des quaternions** $\mathbf{H}$ par*

$$\mathbf{H} = \left\{ a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},\ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 \right\} \subset \mathscr{M}_2(\mathbf{C}).$$

1. Montrer que $\mathbf{1i} = \mathbf{i1} = \mathbf{i}$, $\mathbf{1j} = \mathbf{j1} = \mathbf{j}$ et $\mathbf{1k} = \mathbf{k1} = \mathbf{k}$.
2. Montrer que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$.
3. Montrer que $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$ et $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$.
4. Montrer que pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$, on a :
$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\mathbf{1}.$$
5. En déduire que, si h est un élément non nul de $\mathbf{H}$, il existe $h' \in \mathbf{H}$ tel que $hh' = h'h = \mathbf{1}$.
6. Soit l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbf{C} & \longrightarrow \mathbf{H} \\ z & \longmapsto \operatorname{Re}(z)\,\mathbf{1} + \operatorname{Im}(z)\,\mathbf{i} \end{cases}$.
   (a) Montrer que pour tous z et z' appartenant à $\mathbf{C}$,
   $$\varphi(z + z') = \varphi(z) + \varphi(z'), \quad \varphi(zz') = \varphi(z)\,\varphi(z') \quad \text{et} \quad \varphi(1) = \mathbf{1}.$$
   (b) Montrer que φ est injective.

Ainsi, $\mathbf{C}$ est un sous-corps du corps des quaternions $\mathbf{H}$. Les quaternions $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ seront notés dans toute la suite 1, i, j et k.

Les quaternions 1 et i seront confondus avec les nombres complexes 1 et i.

La construction matricielle du corps des quaternions sera occultée, seules les règles de calcul établies aux questions 1, 2, 3 et 4 seront gardées.

Définition 2. *Conjugué, norme, quaternion imaginaire pur.*
Soit $u = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} \in \mathbf{H}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$.
On définit :

- *le **conjugué** de u noté $\overline{u}$ par $\overline{u} = a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}$;*
- *la **norme** de u notée $|u|$ par $|u| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des quaternions de norme 1 ;*
- *on dit que u est un **imaginaire pur** si $a = 0$. On note $\mathbf{H}^{\text{pur}}$ l'ensemble des quaternions imaginaires purs.*

7. (a) Soient $(u, v) \in \mathbf{H}^2$. Montrer que $|uv| = |u|\,|v|$. On **admet** aussi que l'on a $\left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|u|}{|v|}$ si $v \neq 0$.
   (b) Soit $u \in \mathbf{H}$. Montrer que $\overline{\overline{u}} = u$.
   (c) Soit $(u, v) \in \mathbf{H}^2$. Montrer que $\overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}$.
   (d) Soit $u \in \mathbf{H}$. Montrer que $u\overline{u} = \overline{u}u = |u|^2$.
8. Montrer que si $u \in \mathbf{U}$, alors pour tout $x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, $ux\overline{u} \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$.

Pour $u \in \mathbf{U}$, on définit l'application Ψ_u par $\Psi_u : \begin{cases} \mathbf{H} & \longrightarrow \mathbf{H} \\ x & \longmapsto ux\overline{u} \end{cases}$.

9. Montrer que pour tout $u \in \mathbf{U}$, Ψ_u est $\mathbf{R}$-linéaire i.e.

$$\forall (x, y) \in \mathbf{H}^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \Psi_u(x + \lambda y) = \Psi_u(x) + \lambda \Psi_u(y).$$

10. Soit $u \in \mathbf{U}$. Montrer que :
    (a) Ψ_u laisse stable $\mathbf{R}$, i.e. $\Psi_u(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.
    (b) Ψ_u laisse stable $\mathbf{H}^{\text{pur}}$, i.e. $\Psi_u(\mathbf{H}^{\text{pur}}) \subset \mathbf{H}^{\text{pur}}$.
    On note ψ_u la restriction de Ψ_u à $\mathbf{H}^{\text{pur}}$, i.e. pour tout $h \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, $\psi_u(h) = \Psi_u(h)$.

Partie 2 : Les quaternions au service des rotations de l'espace

Soit $u = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} \in \mathbf{U}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.

11. Donner la matrice A_u de ψ_u dans la base $(\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$.
12. Vérifier que A_u est une matrice orthogonale.
13. Dans cette question, on se propose de montrer que le déterminant de A_u est toujours égal à 1. Soit $u \in \mathbf{U}$, $u \neq -1$. Soit γ définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = \frac{tu + (1-t)}{|tu + (1-t)|}.$$

    (a) Montrer que γ est bien définie et que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in \mathbf{U}$. Vérifier aussi que $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = u$.
    (b) Soit φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = \det\left(A_{\gamma(t)}\right)$. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \in \{-1, 1\}$.
    (c) Montrer que φ est continue sur $[0, 1]$ et déduire $\det(A_u)$.
    (d) Conclure.

On assimile ainsi ψ_u à une rotation de l'espace.

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ de norme égale à 1 et $\theta \in [0, 2\pi[$. Soient

$$u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{i} + b\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{j} + c\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{k} \quad \text{et} \quad u' = a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{k}$$

de sorte que $u = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)u'$.

14. Vérifier que $|u| = 1$.
15. Montrer que $\Psi_u(u') = u'$.
16. Soit (a', b', c') un vecteur de $\mathbf{R}^3$ de norme 1 et orthogonal à (a, b, c). Soit $v = a'\,\mathrm{i} + b'\,\mathrm{j} + c'\,\mathrm{k}$.

(a) Montrer que l'on a

$$\Psi_u(v) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) v + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (u'v - vu') - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) u'vu'.$$

(b) Vérifier que $-u'vu' = -v$, puis que $vu' = -u'v$.

(c) En déduire que

$$\Psi_u(v) = \cos(\theta)\, v + \sin(\theta)\, u'v.$$

(d) Calculer le produit vectoriel $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$ et comparer ses coordonnées avec celles du produit $u'v$.

(e) Que vaut $\Psi_u(u'v)$? On ne demande pas de preuve.

17. Conclure quant à ψ_u.