Devoir surveillé numéro 4 type CCP

Mercredi 3 février

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

Partie 1 : Étude d'une intégrale

1. Justifier que l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge.
   (a) Soit $A \in \mathbf{R}_+$. Montrer que
   $$\int_0^A t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que l'intégrale $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et montrer que $I_{n+1} = (n+1)\, I_n$.
3. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et vaut $n!$.

Partie 2 : Étude d'un produit scalaire

On rappelle que $\mathbf{R}_3[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur on égal à 3.

Pour tous P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

4. Justifier rapidement en utilisant la question 3 que, pour tous P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge.
5. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_3[X]$.

Partie 3 : Construction d'une base orthogonale

Soit Φ l'application définie sur $\mathbf{R}_3[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_3[X], \quad \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)\, P'(X).$$

6. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.
7. Vérifier que la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
8. Vérifier que $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{0, -1, -2, -3\}$. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

9. Pour tout $k \in \{0,1,2\}$, déterminer un vecteur propre P_k de Φ associé à la valeur propre $-k$ et dont le coefficient dominant est 1. On présentera et on expliquera les calculs effectués.

On suppose dans la suite que P_3 désigne un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre -3 et de coefficient dominant égal à 1.

10. Soient P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$.
    (a) On pose $f : t \longmapsto tP'(t)\,\mathrm{e}^{-t}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, exprimer $f'(t)$ en fonction de $\Phi(P)(t)$ et de e^{-t}.
    (b) Montrer que
    $$\langle \Phi(P), Q\rangle = \int_0^{+\infty} f'(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
    (c) En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f'(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ avec $A \in \mathbf{R}_+$, montrer que
    $$\langle \Phi(P), Q\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$
    (d) En déduire que $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P, \Phi(Q)\rangle$.
11. On rappelle que, pour tout $i \in [\![0,3]\!]$, P_i est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-i$.
    Soient i, j dans $[\![0,3]\!]$ tels que $i \neq j$. En remarquant que $\left\langle P_i, \Phi(P_j)\right\rangle = \left\langle \Phi(P_i), P_j\right\rangle$, montrer que $(i-j)\left\langle P_i, P_j\right\rangle = 0$ puis que P_i et P_j sont orthogonaux.
12. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base orthogonale de $\mathbf{R}_3[X]$.

Problème 2

- Dans tout le problème, $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétrique de taille n à coefficients réels.
- $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni du produit scalaire usuel noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On rappelle que
  $$\forall (X,Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2, \quad \langle X, Y\rangle = X^T Y.$$
  La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.
- $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble $\{A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}),\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ \langle AX, X\rangle \geq 0\}$.

Le but de ce problème est de montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}_+$.

Partie 1 : Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A \in \mathscr{S}_2(\mathbf{R})$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
    (a) Vérifier que $\langle AX, X\rangle = 3x^2 - 2xy + 5y^2$.
    (b) En remarquant que $3x^2 - 2xy + 5y^2 = \left(\sqrt{3}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y\right)^2 + \dfrac{14}{3}y^2$, montrer que $A \in \mathscr{S}_2^+(\mathbf{R})$.
3. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et vérifier que les valeurs propres de A sont positives.

Partie 2 : Retour au cas général

4. Rappeler l'énoncé du théorème spectral.
5. On suppose que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

   (a) Justifier qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
   (b) En déduire que l'on a $\langle AX, X\rangle = \lambda \|X\|^2$, puis que $\lambda \geq 0$.

6. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}_+$.
   (a) Justifier qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $\lambda_i \geq 0$, tels que $A = PDP^T$.
   (b) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Justifier que $\langle AX, X\rangle = \langle DY, Y\rangle$ où l'on a posé $Y = P^T X$.
   (c) En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, montrer que $\langle DY, Y\rangle \geq 0$, puis que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$.