Chapitre 11 : Séries de Fourier

Table des matières

1 Fonctions définies par morceaux

1.1 Généralités

Définition 1. *Fonction de classe $\mathscr{C}^0$ (resp. $\mathscr{C}^1$) par morceaux sur un segment.*

*Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est **continue par morceaux** (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux), s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ tel que $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ soit prolongeable comme fonction continue (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.*

*Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.*

Remarque 1. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

Définition 2. *Fonction périodique.*

*Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que f est **périodique** s'il existe un réel $T > 0$ tel que pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.*

Définition 3. *Fonction périodique de classe $\mathscr{C}^0$ (resp. $\mathscr{C}^1$) par morceaux.*

Une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ périodique est dite continue par morceaux (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si elle est continue par morceaux (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur une période.

1.2 Intégration d'une fonction continue par morceaux

Proposition 1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ et $a = b_0 < b_1 < \cdots < b_m = b$ deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f. Alors*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{b_j}^{b_{j+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Admis. □

Définition 4. *Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.*

D'après la proposition 1, la quantité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la subdivision choisie. On note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette quantité commune.

Les propositions suivantes assurent que l'intégrale d'une fonction continue par morceaux vérifie les mêmes propriétés que l'intégrale d'une fonction continue.

Proposition 2. *Relation de Chasles.*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit $c \in [a,b]$. On a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Remarquer que si $\sigma : a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$, alors on peut ajouter le point c à cette subdivision pour obtenir une nouvelle subdivision de $[a,b]$. □

Proposition 3. *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.*

(i) *L'intégrale est **linéaire**, i.e.*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) *L'intégrale est **positive**, i.e. si f est positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.*

(iii) *L'intégrale est* ***croissante****, i.e. si* $f \leq g$*, alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

(iv) $|f|$ *est continue par morceaux sur* $[a,b]$ *et*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 2. Contrairement à l'intégration des fonctions continues, si f est continue par morceaux, positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on n'a pas en général, f nulle sur $[a,b]$. Il suffit de prendre la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

Démonstration. Adapter les preuves de l'intégration des fonctions continues en introduisant des subdivisions. □

2 Coefficients et séries de Fourier

Dans toute la suite f est une fonction T-périodique, continue par morceaux. On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation.

2.1 Coefficients de Fourier

Définition 5. *Coefficients de Fourier.*
On définit les ***coefficients de Fourier*** *de* f *par :*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t, \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsqu'il n y a pas de confusion possible, on notera simplement a_n *et* b_n *les coefficients de Fourier de* f*.*

Remarque 3. (i) Par périodicité, on peut calculer l'intégrale sur n'importe quel intervalle de longueur T.

(ii) La valeur $a_0(f)$ est la valeur moyenne de f sur une période.

Exemple 1. Les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$ par $f(t) = t$ sont

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

Proposition 4. *Propriétés sur les coefficients de Fourier.*
Lorsque la fonction a des propriétés particulières, le calcul des coefficients de Fourier se simplifie. Ainsi :

(i) *lorsque* f *est paire, pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n(f) = 0$ *;*

(ii) *lorsque* f *est impaire, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $a_n(f) = 0$ *;*

(iii) *lorsque* f *vérifie la relation* $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$ *(symétrie de glissement) pour tout* x*, alors pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $a_{2n}(f) = b_{2n}(f) = 0$.

Démonstration. (i) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On fait le changement de variable $u = -t$ dans b_n, ainsi

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{T}\int_0^{-T} f(-u)\sin(-n\omega u)\,\mathrm{d}u.$$

En utilisant la parité de f, l'imparité de sin, on a

$$b_n = -\frac{2}{T}\int_{-T}^0 f(u)\sin(n\omega u)\,\mathrm{d}u.$$

Par T-périodicité de $u \longmapsto f(u)\sin(n\omega u)$, on en déduit que

$$b_n = -\frac{2}{T}\int_0^T f(u)\sin(n\omega u)\,\mathrm{d}u = -b_n,$$

ainsi $b_n = 0$.

(ii) Soit $n \in \mathbf{N}$. On fait le changement de variable $u = -t$ dans a_n, ainsi

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{T}\int_0^{-T} f(-u)\cos(-n\omega u)\,\mathrm{d}u.$$

En utilisant l'imparité de f, la parité de cos, on a

$$a_n = -\frac{2}{T}\int_{-T}^0 f(u)\cos(n\omega u)\,\mathrm{d}u.$$

Par T-périodicité de $u \longmapsto f(u)\cos(n\omega u)$, on en déduit que

$$a_n = -\frac{2}{T}\int_0^T f(u)\cos(n\omega u)\,\mathrm{d}u = -a_n,$$

ainsi $a_n = 0$.

(iii) On montre que $a_{2n} = 0$, un raisonnement analogue montre que $b_{2n} = 0$. On écrit

$$a_{2n} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(2n\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(2n\omega x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T}\int_{T/2}^T f(x)\cos(2n\omega x)\,\mathrm{d}x.$$

On fait le changement de variable $x = u + T/2$ dans la seconde intégrale, ainsi

$$\frac{2}{T}\int_{T/2}^T f(x)\cos(2n\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f\left(u + \frac{T}{2}\right)\cos(2n\omega u + n\omega T)\,\mathrm{d}u.$$

Comme $n\omega T = 2n\pi$ et $f\left(u + \frac{T}{2}\right) = -f(u)$, on en déduit que

$$\frac{2}{T}\int_{T/2}^T f(x)\cos(2n\omega x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(u)\cos(2n\omega u)\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi

$$a_{2n} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(2n\omega x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(u)\cos(2n\omega u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

□

2.2 Séries de Fourier

Définition 6. *Somme partielle de Fourier.*

*Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La **somme partielle de Fourier d'ordre n**, notée $S_n(f)$ est définie sur $\mathbf{R}$ par :*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\right).$$

Exemple 2. En utilisant la fonction f de l'exemple 1, on a

$$S_3(f)(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t).$$

Définition 7. *Série de Fourier.*

La série de Fourier de f en t est la série

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right).$$

⚠Cette série n'est pas nécessairement convergente ! Même si f est continue.

Exemple 3. En reprenant la fonction f de l'exemple 1, on a

$$S(f)(t) = \sum_{n\geq 1}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt).$$

3 Structure hilbertienne

On note $E = \mathscr{C}_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ qui sont T-périodiques.

Proposition 5. *Produit scalaire.*
L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $E \times E$ par

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E.
On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Remarque 4. Si l'on s'autorisait des fonctions continues par morceaux, l'application définie ci-dessus ne serait plus un produit scalaire : elle ne serait plus définie positive.

Corollaire 1. *Structure préhilbertienne.*
$\mathscr{C}_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace préhilbertien.

Proposition 6. *Famille orthonormée.*
La famille $\left\{t \longmapsto 1, t \longmapsto \sqrt{2}\cos(n\omega t), t \longmapsto \sqrt{2}\sin(n\omega t), n \in \mathbf{N}^*\right\}$ est une famille orthonormée de E.

Démonstration. Déjà, il est clair que

$$\frac{1}{T}\int_0^T 1 \times 1 \mathrm{d}t = 1.$$

Ensuite, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{T}\int_0^T 1 \times \sqrt{2}\cos(n\omega t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T 1 \times \sqrt{2}\cos(n\omega t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

De plus, en utilisant la formule de trigonométrie $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, pour tout $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{2}\cos(n\omega t)\sqrt{2}\cos(m\omega t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T (\cos((n-m)\omega t) + \cos((n+m)\omega t))\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}.$$

La formule de trigonométrie $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ permet de montrer que pour tout $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{2}\sin(n\omega t)\sqrt{2}\cos(m\omega t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Enfin, la formule de trigonométrie $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$, pour tout $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{2}\sin(n\omega t)\sqrt{2}\sin(m\omega t)\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}.$$

□

Corollaire 2. *Interprétation géométrique de la somme partielle.*
Si $f \in \mathscr{C}_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, alors $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur l'espace vectoriel $F_{N,T}$ défini par

$$F_{N,T} = \mathrm{Vect}\left(t \longmapsto 1, t \longmapsto \sqrt{2}\cos(k\omega t), t \longmapsto \sqrt{2}\sin(k\omega t), k \in [\![1, n]\!]\right).$$

Démonstration. On rappelle que si E est un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie muni d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$, alors

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i. \tag{1}$$

On note $\mathbb{1} : t \longmapsto 1$, $e_k : t \longmapsto \sqrt{2}\cos(k\omega t)$ et $f_k : t \longmapsto \sqrt{2}\sin(k\omega t)$. On a alors

$$\langle f, \mathbb{1}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = a_0.$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\langle f, e_k\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \langle f, f_k\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant (1), on en déduit que la fonction $p_{F_{N,T}}(f)$ est la fonction définie par

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbf{R}, \quad p_{F_{N,T}}(f)(t) &= \langle f, \mathbb{1}\rangle + \sum_{k=1}^{n}\left(\langle f, e_k\rangle e_k(t) + \langle f, f_k\rangle f_k(t)\right) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t\right)\sqrt{2}\cos(k\omega t) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t\right)\sqrt{2}\sin(k\omega t)\right) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\right) \\
&= S_n(f)(t).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3. *Pour tout $f \in \mathscr{C}_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on a*

$$\|S_n(f)\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Démonstration. On rappelle le résultat du chapitre 9 « Espaces préhilbertiens réels » : si E est une espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$, alors

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2. \tag{2}$$

En gardant les notations de la preuve du corollaire 2, on a vu que :

$$\langle f, \mathbb{1}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = a_0$$

et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \langle f, e_k\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}a_k \quad \text{et} \quad \langle f, f_k\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}b_k.$$

En utilisant la ligne (2), on en déduit que

$$\|S_n(f)\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

□

4 Résultats de convergence

4.1 Égalité de Parseval

Proposition 7. *Égalité de Parseval.*

Si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors les séries $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ et $\sum_{n\geq 1} b_n^2$ convergent et

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Remarque 5. L'égalité de Parseval généralise le théorème de Pythagore au cas d'une infinité de vecteurs.

En terme plus physique, l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différentes harmoniques.

Démonstration. Admis. □

Exemple 4. En appliquant ce résultat à la fonction f de l'exemple 1, on obtient $\dfrac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$, soit $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

4.2 Théorème de Dirichlet

Définition 8. *Régularisée d'une fonction.*

*La **régularisée** d'une fonction continue par morceaux $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbf{R}$ par*

$$\forall t \in \mathbf{R},\quad \widetilde{f}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}.$$

Remarque 6. Lorsque f est continue, on a $f = \widetilde{f}$.

Théorème 1. *Théorème de Dirichlet.*

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction T-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Alors, la série de Fourier de f converge en tout point et $S(f) = \widetilde{f}$, autrement dit

$$\forall t \in \mathbf{R},\quad \widetilde{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right).$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 5. En appliquant ce résultat à la fonction f de l'exemple 1, on a

$$\forall t \in \mathbf{R},\quad \widetilde{f}(t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt).$$