Ombre d'un triangle

Erik Thomas*

Résumé

Dans cette note, nous nous intéressons à savoir s'il est possible de caractériser un triangle (non aplati) à l'aide de ses ombres (i.e. projections orthogonales sur des droites qui « tournent »).

Nous verrons que la réponse dépend d'une condition sur la longueur d'un des côtés et d'un angle du triangle.

1 Introduction

1.1 Position du problème

Dans toute la suite, on se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel et du repère orthonormal $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

Dans cette note, on s'intéresse au problème géométrique suivant : étant donné un triangle (non aplati) inconnu, peut-on le caractériser (par exemple en connaissant deux longueurs et l'angle entre ces deux côtés) seulement en connaissant les variations et les extremums de la longueur des projections orthogonales (ombre du triangle) suivant la droite D_α (droite passant par O et dirigée par le vecteur de coordonnées $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, $\alpha \in [0, \pi[$) ?

1.2 Problème formalisé

Soit T un triangle non aplati du plan euclidien. Pour tout $\alpha \in [0, \pi[$, on note p_α la projection orthogonale sur la droite D_α (droite passant par O et de vecteur directeur $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$).

On définit la fonction sur $[0, \pi[$ la fonction κ (fonction d'ombre) par :

$$\forall \alpha \in [0, \pi[, \quad \kappa(\alpha) := \lambda(p_\alpha(T)),$$

où, par abus, λ est la mesure de Lebesgue sur la droite D_α, assimilée à $\mathbb{R}$. En d'autres termes, $\kappa(\alpha)$ mesure la longueur du projeté orthogonal de T sur D_α. Notons que, comme T est convexe, et $T = \mathrm{conv}(M, N, P)$ (enveloppe convexe des sommets du triangle $T := MNP$), alors $T_\alpha := p_\alpha(T) = \mathrm{conv}(p_\alpha(M), p_\alpha(N), p_\alpha(P))$. Ainsi, en posant $M_\alpha = p_\alpha(M)$, $N_\alpha = p_\alpha(N)$ et $P_\alpha = p_\alpha(P)$, on a :

$$\kappa(\alpha) = \max\{M_\alpha N_\alpha, N_\alpha P_\alpha, M_\alpha P_\alpha\}.$$

Comme $D_\alpha = D_{\alpha+\pi}$, la fonction κ ainsi définie se prolonge en une fonction π-périodique sur $\mathbb{R}$.

La position du problème est donc la suivante : peut-on caractériser le triangle MNP en connaissant uniquement les variations et les extremums de la fonction d'ombre ? Peut-on, par exemple, retrouver la distance du plus grand côté, la longueur d'un autre côté et de l'angle (non orienté) entre ces deux côtés ?

2 Étude de la fonction d'ombre

Avant de répondre à la question posée, nous allons calculer la fonction d'ombre κ du triangle MNP et étudier ses variations.

Quitte à composer par une similitude (qui ne modifie pas les rapports entre les longueurs et ne change pas les angles non orientés), on peut supposer que le plus grand côté du triangle est OI et que l'autre point du

*erik.thomas@ens-rennes.fr

triangle, appelons-le maintenant B, a pour coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $0 < r \leq 1$. Notons que l'on a $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Remarquons que les fonctions d'ombre des triangles MNP et OIB diffèrent uniquement d'une constante multiplicative et d'un déphasage.

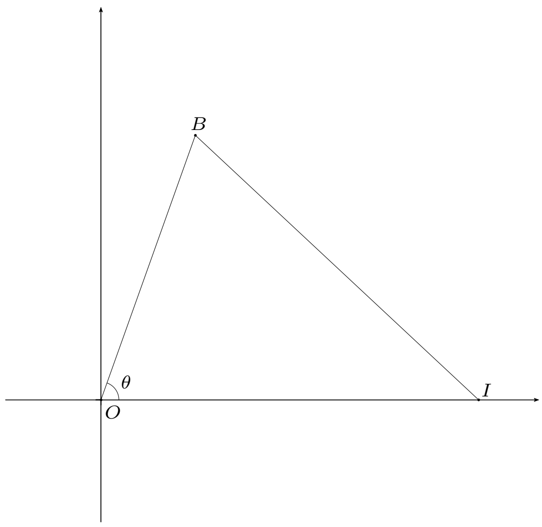

Figure 1 – Le triangle OIB.

2.1 Fonction d'ombre

Proposition 2.1. *La fonction d'ombre κ du triangle OIB est donnée par*

$$\forall \alpha \in [0, \pi[, \quad \kappa(\alpha) = \begin{cases} \cos(\alpha) & \textit{si } \alpha \in \left[0, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right)\right[\\ r\cos(\alpha - \theta) & \textit{si } \alpha \in \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right), \frac{\pi}{2}\right[\\ r\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha) & \textit{si } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \theta\right[\\ -\cos(\alpha) & \textit{si } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2} + \theta, \pi\right[\end{cases}.$$

Démonstration. On rappelle que les sommets du triangle sont les points $O(0,0)$, $I(1,0)$ et $B(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. O_α, I_α et B_α désignent les projections orthogonales de ces points sur la droite D_α. Ils ont pour coordonnées respectives $(0,0)$, $\left(\cos^2(\alpha), \cos(\alpha)\sin(\alpha)\right)$ et $(r\cos(\alpha-\theta)\cos(\alpha), r\cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha))$.

On rappelle enfin que T_α la projection orthogonale du triangle OIB sur la droite D_α.

- On remarque que si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, les coordonnées des points I_α et B_α sont positives. De plus,

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) \geq r\cos(\alpha-\theta)\cos(\alpha) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(\alpha)(1 - r\cos(\theta)) \geq r\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1 - r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} \geq \tan(\alpha) \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right) \geq \alpha. \end{aligned}$$

  On en déduit que si $\alpha \in \left[0, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right)\right[$, alors $T_\alpha = [O_\alpha A_\alpha]$, puis

$$\kappa(\alpha) = \sqrt{\cos^4(\alpha) + \cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha)} = \cos(\alpha).$$

Si $\alpha \in \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right), \frac{\pi}{2}\right[$, alors $T_\alpha = [O_\alpha B_\alpha]$ et

$$\kappa(\alpha) = \sqrt{r^2\cos^2(\alpha-\theta)\cos^2(\alpha) + r^2\cos^2(\alpha-\theta)\sin^2(\alpha)} = r\cos(\alpha-\theta).$$

- Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\theta\right[$, alors l'abscisse de I_α est positive et son ordonnée négative, alors que les coordonnées de B_α sont toutes les deux négatives. Il s'ensuit que $T_\alpha = [I_\alpha B_\alpha]$, puis

$$\begin{aligned}\kappa(\alpha) &= \sqrt{\left(\cos^2(\alpha) - r\cos(\alpha-\theta)\cos(\alpha)\right)^2 + \left(\cos(\alpha)\sin(\alpha) - r\cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha)\right)^2}\\ &= |\cos(\alpha) - r\cos(\alpha-\theta)|\\ &= r\cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha).\end{aligned}$$

- Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}+\theta, \pi\right[$, on note alors que les abscisses des points I_α et B_α sont positives, alors que les ordonnées sont négatives. Comme $\pi \geq \alpha \geq \alpha - \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(\alpha) \leq \cos(\alpha-\theta) \leq 0$, puis $\cos(\alpha)\sin(\alpha) \leq \cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha) \leq r\cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha)$. Il s'ensuit que $T_\alpha = [O_\alpha I_\alpha]$

$$\kappa(\alpha) = \sqrt{\cos^4(\alpha) + \cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha)} = -\cos(\alpha).$$

□

Remarque 1. La relation $\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ permet de vérifier que la fonction κ est continue sur $[0, \pi[$.

2.2 Variations de la fonction d'ombre

Il est clair que la fonction κ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}+\theta, \pi\right[$. Étudions les variations de κ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\theta\right[$. On a :

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\theta\right[, \quad \kappa'(\alpha) \geq 0 &\Leftrightarrow \sin(\alpha) - r\sin(\alpha-\theta) \geq 0\\ &\Leftrightarrow \sin(\alpha)(1-r\cos(\theta)) \geq -r\cos(\alpha)\sin(\theta)\\ &\Leftrightarrow \tan(\alpha) \leq -\frac{\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(\tan(\alpha)) \leq -\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\right)\\ &\Leftrightarrow \alpha - \pi \leq -\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\right)\\ &\Leftrightarrow \alpha \leq \pi - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\right).\end{aligned}$$

Il semble alors indispensable de comparer $\pi - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\right)$ et $\frac{\pi}{2}+\theta$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}+\theta \leq \pi - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\right) &\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\right) \leq \frac{\pi}{2} - \theta\\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)} \leq \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &\Leftrightarrow r \leq \frac{1}{\cos(\theta)}\left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right).\end{aligned}$$

On en déduit les deux tableaux de variations possibles :

- Lorsque $r \leq \frac{1}{\cos(\theta)} \left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$, on a :

α	0		$\frac{\pi}{2}$		π
κ	1	$\searrow$	$r\sin(\theta)$	$\nearrow$	1

- Lorsque $r > \frac{1}{\cos(\theta)} \left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$, on a :

α	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi - \text{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta)}{1 - r\cos(\theta)}\right)$		$\frac{\pi}{2} + \theta$		π
κ	1	$\searrow$	$r\sin(\theta)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\sin(\theta)$	$\nearrow$	1

La valeur $\kappa\left(\pi - \text{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta)}{1 - r\cos(\theta)}\right)\right)$ semble pénible à calculer et elle nous est inutile.

3 Réponse au problème

La seule observation des variations et des extremums de la fonction κ sur $[0, \pi[$ permet-elle de retrouver les caractéristiques du triangle OIB ?

On distingue deux cas :

- Si $r \leq \frac{1}{\cos(\theta)} \left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$, alors la fonction κ admet un maximum global qui vaut 1, qui correspond à la longueur du côté le plus long du triangle.
  Le minimum atteint en $\frac{\pi}{2}$ vaut $r\sin(\theta)$. Cette valeur de permet pas de retrouver les valeurs de r et θ, ce qui ne permet pas de caractériser le triangle OIB sans information supplémentaire.
- Si $r > \frac{1}{\cos(\theta)} \left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$, la fonction κ admet un maximum global qui donne la longueur du côté le plus long du triangle.
  La fonction κ admet deux minimums qui valent $r\sin(\theta)$ et $\sin(\theta)$. La connaissance de ces deux minimums permet de retrouver $\sin(\theta)$, θ car $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et enfin r.
  Dans ce cas, on peut retracer le triangle OIB.

Exemple 1. Lorsque OIB est un triangle isocèle en O (i.e. $r = 1$), la condition $r > \frac{1}{\cos(\theta)} \left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$ est toujours vraie (car $1 > \cos(\theta)$), donc il est possible de retrouver le triangle OIB uniquement à l'aide des variations et des extremums de la fonction κ.

Ce cas inclut le cas du triangle équilatéral.

Exemple 2. Comme $\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos(\theta)} \left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = 1$ et $r \leq 1$, la condition $r > \frac{1}{\cos(\theta)} \left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$ est « moins souvent » satisfaite lorsque θ est petit.

Références

[1] *Mathématiques d'école : Nombres, mesures et géométrie*, D. Perrin, Cassini, 2011.