

Chapitre 12 : Probabilité sur un univers dénombrable

Table des matières

1	Espaces probabilisés dénombrables	2
1.1	Rappels sur les applications	2
1.2	Ensembles dénombrables	3
1.3	Probabilités sur un univers dénombrable	3
1.4	Conditionnement par un événement	4
1.5	Indépendance d'événements	5
2	Variables aléatoires discrètes	6
2.1	Variables aléatoires réelles	6
2.2	Loi d'une variable aléatoire réelle	6
2.3	Fonction de répartition	6
2.4	Espérance d'une variable aléatoire réelle	7
2.5	Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle	8
2.6	Lois usuelles	9
2.6.1	Loi géométrique	9
2.6.2	Loi de Poisson	11
3	Compléments	13
3.1	Couple de variables aléatoires	13
3.1.1	Généralités	13
3.1.2	Indépendance de deux variables aléatoires	14
3.1.3	Indépendance mutuelle de variables aléatoires	14
3.2	Loi de Pascal	15

1 Espaces probabilisés dénombrables

1.1 Rappels sur les applications

Définition 1. *Application injective/surjective/bijective.*

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que :

(i) f est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad (f(x) = f(x')) \implies (x = x').$$

(ii) f est surjective si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

(iii) f est bijective si f est injective et surjective.

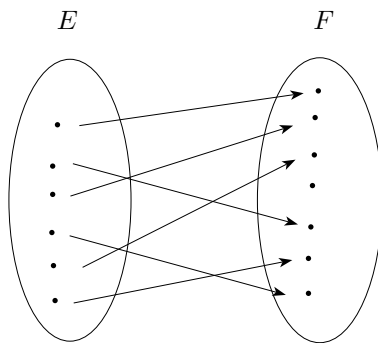


FIGURE 1 – Illustration de l'injectivité d'une application $f : E \rightarrow F$: tous les éléments de E ont des images distinctes par f .

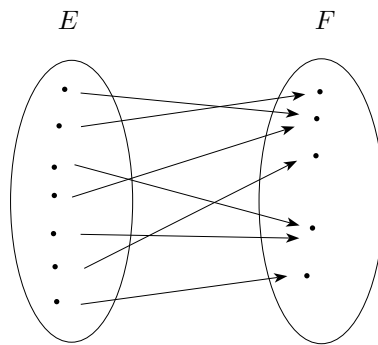


FIGURE 2 – Illustration de la surjectivité d'une application $f : E \rightarrow F$: tous les éléments de F ont au moins un antécédent par f .

Proposition 1. *Caractérisation des bijections.*

Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective, si et seulement si, tout élément de F admet un unique antécédent par f .

Démonstration. Voir cours de TSI 1.

□

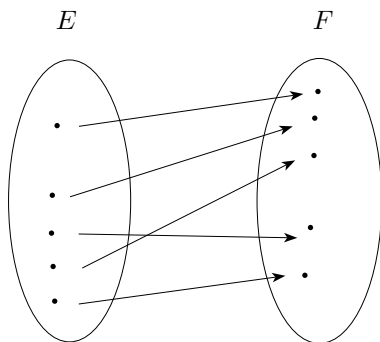


FIGURE 3 – Illustration de la bijectivité d’une application $f : E \rightarrow F$: tous les éléments de F ont un **unique** antécédent par f .

Définition 2. *Application réciproque.*

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective.

D’après la proposition 1, tout élément $y \in F$ admet un unique antécédent par f . On le note $f^{-1}(y)$.

L’application $f^{-1} : \begin{cases} F & \rightarrow E \\ y & \mapsto \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{cases}$ s’appelle la **bijection réciproque** de f .

Proposition 2. *Relation entre une application bijective et sa réciproque.*

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Alors, on a :

$$\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Démonstration. Voir cours de TSI 1. □

1.2 Ensembles dénombrables

Définition 3. *Ensemble dénombrable.*

On dit qu’un ensemble est **dénombrable** s’il existe une bijection entre cet ensemble et \mathbf{N} .

Remarque 1. La notion de dénombrabilité n’est pas parfaitement définie : pour certains la définition précédente englobe les ensembles finis.

Exemple 1. 1. \mathbf{N} , \mathbf{Z} et \mathbf{Q} sont dénombrables.

2. Tout intervalle de \mathbf{R} contenant au moins deux éléments n’est pas dénombrable.

1.3 Probabilités sur un univers dénombrable

Dans la suite du chapitre, Ω est un univers dénombrable modélisant une expérience aléatoire. Nous allons étendre les définitions vues au chapitre 7.

Définition 4. *Probabilité.*

On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- (i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- (ii) pour toute suite d’événements $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux à deux incompatibles, on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Proposition 3. *Propriétés des probabilités.*

Soit \mathbf{P} sur une probabilité sur un univers Ω . On a :

- (i) pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, en particulier, $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$;

- (ii) pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, en particulier $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$;
 (iii) pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Démonstration. La preuve est la même que celle de la proposition 1 du chapitre 7. □

Proposition 4. Si $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbf{N}\}$ et si $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de nombres positifs telle que la série $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité \mathbf{P} sur Ω telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(\{\omega_n\}) = p_n.$$

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve de la proposition 2 du chapitre 7. □

Remarque 2. Autrement dit, pour définir une probabilité \mathbf{P} sur un univers dénombrable Ω , il suffit de définir \mathbf{P} sur chaque singleton de Ω (aussi appelé **événement élémentaire**) de sorte que la somme donne 1. La formule générale est alors donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

Exemple 2. Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right) = 1$, d'après la proposition ci-dessus, il existe une unique probabilité \mathbf{P} définie sur $\Omega = \mathbf{N}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

1.4 Conditionnement par un événement

Définition 5. Probabilité conditionnelle.

Soient A et B deux événements avec $\mathbf{P}(B) \neq 0$. On définit la **probabilité de A sachant B** , notée $\mathbf{P}_B(A)$, par

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Remarque 3. On utilise aussi parfois la notation $\mathbf{P}(A|B)$.

Exemple 3. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note les événements A : « on obtient 6 » et B : « on obtient un nombre pair ». On a

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 5. Si B est un événement de probabilité non nulle, l'application $\mathbf{P}_B : A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \mathbf{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω .

Remarque 4. Comme l'application $\mathbf{P}_B : A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \mathbf{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω , toutes les propriétés établies à la proposition 3 sont vérifiées par \mathbf{P}_B .

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 3 du chapitre 7. □

Proposition 6. Formule des probabilités composées.

Soient A_1, \dots, A_n des événements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 4 du chapitre 7. □

Définition 6. *Système complet d'événements.*

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de Ω . On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si :

- (i) les événements sont deux à deux incompatibles ;
- (ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Proposition 7. *Formule des probabilités totales.*

Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un système complet d'événements. Soit B un événement, on a :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n).$$

Si en plus on suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$, la relation précédente se réécrit en

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B) \times \mathbf{P}(A_n).$$

Démonstration. Adapter la preuve de la proposition 5 du chapitre 7. □

Proposition 8. *Formule de Bayès.*

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B) \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 6 du chapitre 7. □

1.5 Indépendance d'événements

Définition 7. *Indépendance de deux événements.*

Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Remarque 5. Lorsque B est de probabilité non nulle, l'indépendance de A et B est équivalente à $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

Définition 8. *Indépendance mutuelle d'événements.*

Soient A_1, \dots, A_n des événements. On dit que les événements sont **mutuellement indépendants** si

$$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Remarque 6. L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fautive comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 4. Soit $\Omega = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme. Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{1, 4\}$.

On vérifie facilement que les événements A , B et C sont deux à deux indépendants mais ils ne sont pas mutuellement indépendants car

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(C).$$

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Variables aléatoires réelles

Définition 9. *Variable aléatoire.*

Une **variable aléatoire réelle** est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$.

Notation :

Si $U \subset \mathbf{R}$, on note $(X \in U)$ l'événement

$$(X \in U) = X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in U\}.$$

En particulier, $(X \leq x)$ ($x \in \mathbf{R}$) est l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$.

Définition 10. *Image d'une variable aléatoire par une application.*

Soit $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ une application. On définit la **variable aléatoire image** de X par f comme la composée $f \circ X$, i.e.

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (f \circ X)(\omega) = f(X(\omega)).$$

2.2 Loi d'une variable aléatoire réelle

Proposition 9. *L'application \mathbf{P}_X définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ par :*

$$\forall U \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbf{P}_X(U) = \mathbf{P}(X \in U)$$

est une probabilité sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$.

Démonstration. On vérifie les points (i) et (ii) de la définition 4. On a

(i) On a

$$\mathbf{P}_X(X(\Omega)) = \mathbf{P}(X^{-1}(X(\Omega))) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

(ii) Soient A_1, \dots, A_n des événements deux à deux incompatibles de $X(\Omega)$. On a

$$\mathbf{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n X^{-1}(A_i)\right).$$

Comme les A_1, \dots, A_n sont deux à deux incompatibles, les événements $X^{-1}(A_1), \dots, X^{-1}(A_n)$ le sont aussi. Comme \mathbf{P} est une probabilité de Ω , on a

$$\mathbf{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X \in A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_X(A_i).$$

□

Définition 11. *Loi d'une variable aléatoire.*

La variable aléatoire \mathbf{P}_X s'appelle la **loi** de X .

Proposition 10. *La loi \mathbf{P}_X est entièrement déterminée par la donnée de $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.*

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 8 du chapitre 7.

□

2.3 Fonction de répartition

Définition 12. *Fonction de répartition.*

On définit la fonction de répartition F_X sur \mathbf{R} par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

Proposition 11. *Fonction de répartition d'une variable aléatoire.*

Soit X une variable aléatoire sur Ω . On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$. On note aussi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $p_n = \mathbf{P}(X = x_n)$, alors on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbf{N} \\ x_k \leq x}} p_k.$$

Démonstration. Adapter celle de la proposition 9 du chapitre 7. □

Corollaire 1. *Propriétés de la fonction de répartition.*

La fonction de répartition a les propriétés suivantes :

- (i) F_X est croissante sur \mathbf{R} ;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$;
- (iii) F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point (fonction càdlàg) ;
- (iv) deux variables aléatoires finies suivent la même loi si, et seulement si, elles ont la même fonction de répartition.

Démonstration. Elle est claire en utilisant la proposition 11, sauf le fait que F_X est continue à droite. Il nous faudrait un résultat supplémentaire. □

2.4 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Dans cette sous-partie, on généralise la notion d'espérance vue au chapitre 7. Au chapitre 7, la somme était finie (car Ω l'était). Pour manipuler l'espérance de variables aléatoires définies sur un univers infini dénombrable, on a besoin de la notion de série.

Définition 13. *Espérance.*

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers dénombrable tel que $X(\Omega)$ soit infini dénombrable. On écrit $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$. On dit que X admet une **espérance** si la série $\sum_{n \geq 0} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument. Le cas échéant, on pose

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(X = x_n).$$

Remarque 7. (i) C'est un théorème de Riemann qui montre que si la série $\sum_{n \geq 0} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ converge

absolument, alors toute pour toute bijection $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} x_{\varphi(n)} \mathbf{P}(X = x_{\varphi(n)})$ converge

absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)} \mathbf{P}(X = x_{\varphi(n)}).$$

(ii) L'espérance est la moyenne théorique des valeurs prises par X .

Exemple 5. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $n \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Or, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} n \mathbf{P}(X = n)$ diverge, ainsi X n'a pas d'espérance.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

D'après le critère de d'Alembert pour les séries, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{n+1}}$ converge (absolument), donc X admet une espérance.

Pour calculer l'espérance, on repart du développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

le rayon de convergence valant 1.

En dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence, on a

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

En prenant $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Proposition 12. Linéarité de l'espérance.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers dénombrable Ω ayant chacune une espérance. Soit $a \in \mathbf{R}$. La variable aléatoire $aX + Y$ admet une espérance et on a

$$\mathbf{E}(aX + Y) = a\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Démonstration. Admis. Lorsque Y est une variable aléatoire constante, on peut reprendre la preuve de la proposition 11 du chapitre 7. □

Définition 14. Variable aléatoire centrée.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . On dit que X est **centrée** si X admet une espérance et si celle-ci est nulle.

Théorème 1. Théorème de transfert.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On écrit $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$. Soit $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} f(x_n) \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument. Le cas échéant, on a :

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \mathbf{P}(X = x_n).$$

Démonstration. Admis. □

2.5 Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle

Définition 15. Variance.

On dit que X admet une **variance** si X^2 admet une espérance. Le cas échéant, on définit $\mathbf{V}(X)$ par

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right).$$

Remarque 8. Ainsi, par définition, $\mathbf{V}(X) \geq 0$.

Définition 16. *Écart type.*

Si X admet une variance, on définit son **écart type**, noté $\sigma(X)$, par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 13. *Formule de König-Huygens.*

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors, on a

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 14 du chapitre 7. □

Proposition 14. *Soit X une variable aléatoire ayant une variance. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Alors*

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X).$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 15 du chapitre 7. □

Proposition 15. *Inégalité de Bienaymé-Tchebyshev.*

Soit X une variable aléatoire ayant une variance. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 16 en adaptant la preuve de l'inégalité de Markov (hors programme). □

2.6 Lois usuelles

2.6.1 Loi géométrique

Définition 17. *Loi géométrique.*

Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire sur Ω . On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre p , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et si

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Remarque 9. (i) Une loi géométrique de paramètre p donne le rang du premier 1 dans une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p .

(ii) Conséquence de la remarque précédente : l'univers est donc $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$). On peut montrer que cet ensemble **n'est pas** dénombrable. Mauvaise médecine dans un tel chapitre....

Proposition 16. *Espérance et variance d'une loi géométrique.*

Soit $p \in]0, 1[$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration. On sépare le calcul de l'espérance et celui de la variance.

Espérance. On rappelle (!) le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et le rayon de convergence est 1.

On a aussi vu que l'on peut dériver terme à terme la série entière dans l'intervalle ouvert de convergence. Ainsi,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}. \quad (1)$$

Ainsi, en prenant $x = 1 - p \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}.$$

En multipliant par p , on en déduit que

$$\frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{P}(X = n). \quad (2)$$

La preuve ne serait pas complète si l'on ne justifiait pas que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{P}(X = n)$ converge absolument, ce qui est le cas car elle converge et est à termes positifs.

Variance. On commence par remarquer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$k^2 \mathbf{P}(X = k) = (k(k-1) + k) \mathbf{P}(X = k) = k(k-1)p(1-p)^{k-1} + kp(1-p)^{k-1}.$$

En dérivant à nouveau (1) à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, on a

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

En prenant $x = 1 - p \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{2}{p^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}.$$

En multipliant par $p(1-p)$, on a

$$\frac{2(1-p)}{p^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \mathbf{P}(X = n).$$

D'après (2), on a

$$\frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{P}(X = n).$$

En additionnant les deux lignes précédentes et en utilisant la linéarité, on a

$$\frac{2(1-p) + p}{p^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbf{P}(X = n).$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbf{P}(X = n)$ est à termes positifs, elle converge absolument, on en déduit que X^2 admet une espérance, donc X admet une variance. D'après la formule de König-Huygens, on a

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{2(1-p) + p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

□

2.6.2 Loi de Poisson

Définition 18. *Loi de Poisson.*

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+$. Soit X une variable aléatoire sur Ω . On dit que X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et si

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque 10. La loi de Poisson sert souvent à mesurer le nombre d'occurrences au cours d'un intervalle de temps donné, par exemple, le nombre de personnes dans une file d'attente, le nombre de défaut de crédits ou encore le nombre de noyaux radioactifs qui se désintègrent.

Proposition 17. *Espérance et variance d'une loi de Poisson.*

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbf{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration. On sépare le calcul de l'espérance et celui de la variance.

On rappelle le développement en série entière de la fonction exp (rayon $+\infty$), on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Espérance. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$k \mathbf{P}(X = k) = k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 0} k \mathbf{P}(X = k)$ converge absolument car proportionnelle à une série exponentielle. Ainsi, X admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \quad \text{on pose } \ell = n - 1 \\ &= e^{-\lambda} \lambda e^\lambda \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Variance. On commence par remarquer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$,

$$k^2 \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} (k(k-1) + k) \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \left(k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + k \frac{\lambda^k}{k!} \right) = e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right).$$

Les séries $\sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$ et $\sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ convergent absolument, donc la série $\sum_{k \geq 2} k^2 \mathbf{P}(X = k)$ converge

absolument, ainsi X^2 admet une espérance et X admet une variance. De plus

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathbf{P}(X = k) \\
 &= e^{-\lambda} \lambda + e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda + e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\
 &= e^{-\lambda} \lambda + e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} + \lambda \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \right) \\
 &= e^{-\lambda} \lambda + e^{-\lambda} \left(\lambda^2 e^\lambda + \lambda (e^\lambda - 1) \right) \\
 &= \lambda^2 + \lambda.
 \end{aligned}$$

Par la formule de König-Huygens, on a

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Proposition 18. *Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.*

Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires qui suivent une loi binomiale de paramètre n et p_n où $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$. Alors,

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration. \triangleleft La preuve est hors programme, elle est donnée à titre culturel.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Pour tout $n \geq k$,

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}.$$

$$\text{Déjà, pour } k \geq n, \quad \binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!n!} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^n}{n!}.$$

De plus, pour tout $k > \lambda$,

$$(1 - p_n)^{n-k} = (1 - p_n)^{-k} \exp(n \ln(1 - p_n)).$$

Comme $\ln(1 - p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -p_n$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 - p_n) = -\lambda,$$

puis par continuité de la fonction exp sur \mathbf{R} , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(n \ln(1 - p_n)) = e^{-\lambda}.$$

En remarquant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p_n)^{-k} = 1$, on obtient finalement

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k \lambda^k}{k! n^k} e^{-\lambda} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

□

3 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir pour les concours.

3.1 Couple de variables aléatoires

Le but de cette sous-partie est d'étendre la notion de couple de variables aléatoires à des variables aléatoires prenant un nombre dénombrable de valeurs. On pourra faire le lien avec ce qui a été fait au chapitre 7.

On fixe X et Y deux variables aléatoires sur un univers Ω dénombrable. Le couple (X, Y) est un couple de variables aléatoires.

3.1.1 Généralités

Définition 19. *Loi conjointe.*

La **loi conjointe** du couple (X, Y) est la donnée de $\mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y))$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Définition 20. *Lois marginales.*

La loi X et la loi Y s'appellent les **lois marginales** du couple (X, Y) .

Remarque 11. La loi du couple donne la loi des marginales. En effet, la formule des probabilités totales donne

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y)).$$

⚠ La réciproque est fautive : la loi des marginales **ne donne pas** la loi du couple. Nous renvoyons à la remarque 10 du chapitre 7 pour un contre-exemple.

Remarque 12. Les définitions précédentes s'étendent naturellement au n -uplet de variables aléatoires.

Exemple 6. Soit $p \in]0, 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{P}(X = x \cap Y = y) = \begin{cases} e^{-p} - p + p e^{-p} & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ p - p e^{-p} & \text{si } (x, y) = (0, 1) \\ p e^{-p} & \text{si } (x, y) = (1, 1) \\ \frac{p^n}{n!} e^{-p} & \text{si } (x, y) = (n, 0) \text{ et } n \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On se propose de donner les lois de X et Y .

(i) *Loi de X .*

Il est clair que $X(\Omega) = \mathbf{N}$. Soit $k \in \mathbf{N}$. La formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X = k \cap Y = 0) + \mathbf{P}(X = k \cap Y = 1).$$

Cette somme se simplifie en : pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \begin{cases} e^{-p} - p + p e^{-p} + p - p e^{-p} = e^{-p} & \text{si } k = 0 \\ p e^{-p} & \text{si } k = 1 \\ e^{-p} \frac{p^k}{k!} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}.$$

Ainsi, X suit une loi de Poisson de paramètre p .

(ii) Loi de Y .

Il est clair que $Y(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$. De plus, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = 1 \cap X = n) = p - pe^{-p} + pe^{-p} = p.$$

Ainsi, Y suit une Bernoulli de paramètre p .

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Définition 21. Loi conditionnelle.

Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y = y) > 0$. La loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ est la donnée de $\mathbf{P}_{(Y=y)}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

3.1.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 22. Indépendance de deux variables aléatoires.

On dit que X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

Proposition 19. On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Alors :

(i) pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$, on a

$$\mathbf{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B).$$

(ii) pour toutes applications $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes (lemme des coalitions).

Démonstration. Admis. □

3.1.3 Indépendance mutuelle de variables aléatoires

On fixe $n \in \mathbf{N}^*$ et on se donne un n -uplet de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) .

Définition 23. Indépendance mutuelle.

On dit que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i).$$

Proposition 20. On suppose que X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes. Alors :

(i) pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, on a

$$\mathbf{P}((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \times \dots \times \mathbf{P}(X_n \in A_n).$$

(ii) pour toutes applications $f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^{n-p} \rightarrow \mathbf{R}$, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes (lemme des coalitions).

Démonstration. Admis. □

Proposition 21. Variance de la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes et ayant toutes une variance. Alors, la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ a une variance et

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n).$$

Démonstration. Adapter la preuve de la proposition 26 du chapitre 7. □

Proposition 22. *Stabilité des lois de Poisson.*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On suppose X et Y indépendantes et suivant respectivement des lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Alors, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Démonstration. On commence par donner le support : $(X + Y)(\Omega) = \mathbf{N}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, pour calculer $\mathbf{P}(X + Y = n)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = k)_{k \in \mathbf{N}}$. Ainsi, en utilisant l'indépendance de X et Y

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X + Y = n \cap X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n - k \cap X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n - k) \times \mathbf{P}(X = k). \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{P}(Y = n - k) = 0$ pour $k \geq n$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

□

On en déduit facilement le corollaire suivant en procédant par récurrence.

Corollaire 2. *Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

3.2 Loi de Pascal

Lemme 1. *Pour tout $r \in \mathbf{N}$, on a*

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}.$$

Démonstration. On utilise le développement en série entière $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

On dérive cette relation r fois, ainsi

$$\frac{r!}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r}.$$

On conclut en divisant par $r!$ et en remarquant que $\frac{k!}{r!(k-r)!} = \binom{k}{r}$.

□

Définition 24. *Loi de Pascal.*

Soient $r \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire sur Ω . On dit que X suit la **loi de Pascal** de paramètres r et p si $X(\Omega) = \llbracket r, +\infty \llbracket$ et si :

$$\forall k \in \llbracket r, +\infty \llbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

La définition est mal posée. S'il est clair que pour tout $k \in \llbracket r, +\infty \llbracket$, $\mathbf{P}(X = k) \geq 0$, le fait que $\sum_{k=r}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$ n'est pas totalement évident. D'après le lemme 1, on a

$$\frac{1}{(1-p)^r} = \sum_{j=r-1}^{+\infty} \binom{j}{r-1} p^{j-r-1}.$$

Le changement de variable $k = j - 1$ donne

$$1 = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} p^{k-r} (1-p)^r = \sum_{k=r}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k).$$

Remarque 13. (i) Lorsque $r = 1$, on retrouve la loi géométrique.

(ii) La loi de Pascal de paramètres r et p compte le r -ième succès au cours d'une répétition d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes ayant toutes un même paramètre p .

Proposition 23. *Les lois de Pascal sont somme de lois géométriques.*

Soit $p \in]0, 1[$. Soient X_1, \dots, X_r ($r \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$) variables aléatoires définies sur Ω mutuellement indépendantes qui suivent toutes des lois géométriques de paramètre p .

Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Pascal de paramètres r et p .

Démonstration. On procède par récurrence. On prouve le résultat pour $r = 2$. Il est clair que $(X_1 + X_2) \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. Pour calculer $\mathbf{P}(X_1 + X_2 = n)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k \in \mathbf{N}^*}$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}((X_1 + X_2 = n) \cap (X_1 = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}((X_2 = n - k) \cap (X_1 = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_2 = n - k) \times \mathbf{P}(X_1 = k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{n-k-1} p(1-p)^{k-1} \\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \\ &= \binom{n-1}{2-1} p^2(1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

On suppose le résultat vraie pour $r \in \mathbf{N}$, $r \geq N$. Soient X_1, \dots, X_r, X_{r+1} $r + 1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et qui suivent toutes une loi géométrique de paramètre p .

Il est clair que $(X_1 + \dots + X_{r+1})(\Omega) = \llbracket r + 1, +\infty \llbracket$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $X_1 + \dots + X_r$ suit une loi de Pascal de paramètres r et p . D'après la proposition 20, les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_r$ et X_{r+1} sont indépendantes. Soit $n \in \llbracket r + 1, +\infty \llbracket$. Pour calculer $\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_{r+1} = n)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet

d'événements $(X_{r+1} = k)_{k \in \mathbf{N}^*}$. On a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_{r+1} = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}((X_1 + \cdots + X_{r+1} = n) \cap (X_{r+1} = k)) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}((X_1 + \cdots + X_r = n - k) \cap (X_{r+1} = k)) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-r} \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_r = n - k) \times \mathbf{P}(X_{r+1} = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-r} \binom{n-k-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-k-r} p (1-p)^{k-1} \\
 &= p^{r+1} (1-p)^{n-(r+1)} \sum_{k=1}^{n-r} \binom{n-k-1}{r-1} \\
 &= \binom{n-1}{r} p^{r+1} (1-p)^{n-(r+1)}
 \end{aligned}$$

car $\sum_{k=1}^{n-r} \binom{n-k-1}{r-1} = \binom{n-1}{r}$ (généralisation de la formule de Pascal).

Ainsi la propriété est vraie au rang $r+1$, ce qui termine la récurrence. \square

Corollaire 3. *Espérance et variance d'une loi de Pascal.*

Soient $r \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Pascal de paramètres r et p . Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{r}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les propositions 12, 16, 21 et 23. \square