Chapitre 12 : Exercices

Exercice 1.

Une feuille de travaux dirigés contient 3 erreurs. Le professeur la relit pour corriger les erreurs. À chaque relecture, chaque erreur a une probabilité $1/4$ d'être corrigée. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigées à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les erreurs de la feuille soient corrigées à l'issue de la n-ième relecture ?
3. Combien de relectures faut-il au minimum pour que la probabilité qu'il n'y est plus d'erreur soit d'au moins 0,95 ?

Exercice 2.

Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche la cible a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité $p_1 > 0$ de toucher la cible à chaque tour et le second la probabilité $p_2 > 0$.

1. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
2. Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.
3. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

Exercice 3.

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Exercice 4.

Soit $a \in \mathbf{R}^*$. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}.$$

1. Déterminer un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1}.$$

2. En déduire la valeur de a.
3. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbf{R}^*$. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Déterminer un triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}.$$

2. En déduire la valeur de a.

3. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 6.

Soit $p \in \left]0,1\right[$. On dispose d'une pièce amenant pile avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois pile. Soit X le nombre de faces obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X a une espérance et la calculer.

Exercice 7.

On lance une pièce qui a la probabilité $2/3$ de faire pile. Les lancers sont supposés indépendant. On note X le nombre de lancers nécessaire afin d'avoir pour la première fois deux piles consécutifs et $p_n = \mathbf{P}\left(X = n\right)$.

1. Calculer p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n.$$
3. En déduire une expression explicite de p_n pour $n \in \mathbf{N}^*$.
4. Déterminer le nombre moyen d'essais pour obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 8.

Un étudiant rentre d'une soirée. Il dispose de $n \in \mathbf{N}^*$ clés dont une seule ouvre la porte de son appartement, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant les clés qui n'ont pas marché. On note X le nombre d'essais pour trouver la bonne clé.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Combien lui faut-il d'essais en moyenne ?
2. La soirée était bien arrosée. Il ne se souvient pas des clés qu'il a déjà essayé. On note Y le nombre d'essais pour trouver la bonne clé.
   (a) Donner la loi de Y.
   (b) Combien lui faut-il d'essais en moyenne ?

Exercice 9.

Soit X une variable aléatoire suivant une géométrique dont le paramètre est $p \in \left]0,1\right[$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : « X est pair ».
2. Déterminer la probabilité de l'événement B : « X est un multiple de 3 ».
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 10.

On tire un entier naturel X aléatoirement en suivant une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair et supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$ la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. Calculer $p + q$ et $p - q$. En déduire les valeurs de p et q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.
3. Un joueur est-il avantagé ?

Exercice 11.

On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple et P la proportion de garçons.

1. Exprimer P en fonction de X.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance de P.

Exercice 12.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que $1/X$ admet une espérance, puis calculer là.

Exercice 13.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson dont le paramètre est $\lambda > 0$. Montrer que $1/\left(X+1\right)$ admet une espérance, puis calculer là.

Exercice 14.

On suppose qu'une colonie d'insectes produit N œufs où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, lorsque $(N = n)$, le nombre X d'œufs qui éclosent suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de X.

Exercice 15.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On définit la fonction génératrice G_X associée à X par :

$$G_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)\, t^k$$

pour tous les réels t tels que la série converge.

Calculer la fonction génératrice de X dans les cas suivants :

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ où $p \in]0,1[$;
2. $X \hookrightarrow \mathscr{U}(⟦1,n⟧)$ avec $n \in \mathbf{N}^*$;
3. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$;
4. $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ où $p \in]0,1[$;
5. $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

Exercice 16.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à extraire une boule au hasard sans remise. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour $i \in ⟦1,n⟧$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules et 0 sinon.

1. (a) Pour tout i et pour $k \in ⟦1,n⟧$, on note $U_{i,k}$ l'événement : « l'urne i est choisie à la k-ième épreuve ». En écrivant $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, montrer que pour tout $i \in ⟦1,n⟧$,
$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$
   (b) Pour $i \in ⟦1,n⟧$, donner sans calcul la loi de X_i ainsi que son espérance.
2. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$ en fonction de n.
3. Pour $i \in ⟦1,n⟧$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne i à la fin de ces n épreuves.
   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que $\mathbf{E}(N_i)$.
   (b) Montrer que la variable aléatoire $N_i X_i$ est certaine et donner sa valeur.

Exercice 17.

On considère deux jetons équilibrés J_1 et J_2.

Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et l'autre face est numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.

Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton que l'on suppose mutuellement indépendants.

On note E l'événement « le jeton J_1 est choisit pour le jeu » et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le k-ième lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

1. (a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   (b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une face portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton 1 ?
   Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

   Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.

   On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
2. (a) Calculer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(X = n)$.
   (b) En déduire que $\mathbf{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?
   (c) Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(X)$.
   (d) Montrer que $X(X-1)$ admet une espérance, la déterminer puis vérifier que $\mathbf{V}(X) = 2$.
3. (a) Calculer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(Y = n)$.
   (b) En déduire $\mathbf{P}(Y = 0) = 0$.
   (c) Montrer que Y admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(Y)$.
   (d) Montrer que $Y(Y-1)$ a une espérance, la déterminer et vérifier que $\mathbf{V}(Y) = \dfrac{5}{4}$.
4. On définit sur Ω la variable aléatoire S par : pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$.
   (a) Déterminer $S(\Omega)$.
   (b) Montrer que $\mathbf{P}(S = 1) = \mathbf{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur à 2, comparer d'une part $(X = n)$ et $(Y < n)$ et d'autre part $(Y = n)$ et $(X < n)$, puis en déduire que $(S = n) = (X = n) \cup (Y = n)$.
   (d) Reconnaître la loi de S et préciser son espérance et sa variance.
5. On définit Ω la variable aléatoire I par : pour tout $\omega \in \Omega$, $I(\omega) = \min\{X(\omega), Y(\omega)\}$.
   (a) Montrer que I est une variable aléatoire de Bernoulli.
   (b) Calculer $\mathbf{P}(I = 0)$ puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.