Programme de colle : du 8 février au 12 février

1 Isométries d'un espace euclidien

Révisions du programme précédent.

2 Séries de Fourier

1. Notion de fonction continue (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) par morceaux. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Propriétés.
2. Coefficients de Fourier réels d'une fonction continue par morceaux, ils sont définis pour des fonctions T-périodiques :
$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t,$$
où $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ est la pulsation. Les coefficients de Fourier complexes ne sont pas au programme.
3. Simplification des coefficients de Fourier lorsque f est paire, impaire ou s'il y a une symétrie de glissement ($f\left(x + \dfrac{T}{2}\right) = -f(x)$).
4. Somme partielle de Fourier $S_n(f)(t) = a_0(f) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t)\right)$. Série de Fourier.
5. Approche hilbertienne des séries de Fourier. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, T-périodiques muni du produit scalaire
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t,$$
la famille $\left\{t \longmapsto 1, t \longmapsto \sqrt{2}\cos(n\omega t), t \longmapsto \sqrt{2}\sin(n\omega t), n \in \mathbf{N}^*\right\}$ est orthonormale.
6. $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur Vect $\left(t \longmapsto 1, t \longmapsto \sqrt{2}\cos(k\omega t), t \longmapsto \sqrt{2}\sin(k\omega t), k \in [\![1, n]\!]\right)$.
7. Égalité de Parseval
$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$
8. Théorème de Dirichlet.