Chapitre 14 : Équations différentielles

Table des matières

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 et les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Nous verrons notamment comment résoudre ces équations dans des cas favorables.

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Équations différentielles d'ordre 2

Dans cette partie, on se donne un intervalle I de $\mathbf{R}$ non trivial. Soient $a, b, c : I \longrightarrow \mathbf{K}$ trois fonctions continues sur I. Nous allons étudier l'équation différentielle suivante :

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t) \tag{1}$$

dont l'inconnue est une fonction $y : I \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fois dérivable sur I.

Remarque 1. (i) On sait résoudre cette équation différentielle lorsque a, b sont des fonctions constantes et c est une fonction « simple ».

(ii) Dans la plupart des cas, on ne peut pas donner explicitement les solutions de (1).

1.1 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est une équation différentielle et des conditions initiales. Par exemple,

$$\begin{cases} y'' + t^2 y = 0 \text{ sur } [0, \pi] \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy, alors que

$$\begin{cases} y'' + t^2 y = 0 \text{ sur } [0, \pi] \\ y(0) = 1 \\ y(\pi) = 3 \end{cases}$$

n'est pas un problème de Cauchy (conditions de Dirichlet).

Théorème 1. *Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires d'ordre* 2.

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbf{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution $y : I \longrightarrow \mathbf{K}$.

Démonstration. Admis. □

Remarque 2. Les méthodes d'Euler permettent d'approcher cette solution.

1.2 Équation homogène

Définition 1. *Système homogène.*

L'équation différentielle associée à l'équation différentielle (1) *est l'équation différentielle*

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0. \tag{2}$$

Proposition 1. *Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.*

L'ensemble des solutions de l'équation homogène (2) *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration. (i) Déjà la fonction nulle sur I vérifie clairement (2). De plus, soient y_1 et y_2 vérifient (2) et $\lambda \in \mathbf{K}$. Il est clair que la fonction $y_1 + \lambda y_2$ est deux fois dérivable sur I et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
& (y_1 + \lambda y_2)'' + a(t)(y_1 + \lambda y_2)' + b(t)(y_1 + \lambda y_2) \\
= \; & y_1''(t) + \lambda y_2''(t) + a(t) y_1'(t) + \lambda a(t) y_2'(t) + b(t) y_1(t) + \lambda b(t) y_2(t) \\
= \; & \big(y_1''(t) + a(t) y_1'(t) + b(t) y_1(t)\big) + \lambda \big(y_2''(t) + a(t) y_2'(t) + b(t) y_2(t)\big) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

(ii) On note $\mathscr{S}_h$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène (2). Soient y_1 et y_2 les solutions respectives des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y_1'' + a(t) y_1' + b(t) y_1 = 0 \\ y_1(t_0) = 1 \\ y_1'(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2'' + a(t) y_2' + b(t) y_2 = 0 \\ y_2(t_0) = 0 \\ y_2'(t_0) = 1 \end{cases}.$$

D'après le théorème 1, ces solutions existent et sont uniques. On considère l'application φ définie par

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{S}_h & \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ y & \longmapsto (y(t_0), y'(t_0)) \end{cases}.$$

La linéarité est facile à voir. On va montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbf{K}$ espaces vectoriels.

(a) Soit $y \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Il est clair que la fonction nulle sur I, notée $\mathbb{O}$, est deux fois dérivable sur I, vérifie (2), $\mathbb{O}(t_0) = 0$ et $\mathbb{O}'(t_0) = 0$. Par unicité de la solution (théorème 1), on a $y = \mathbb{O}$.
φ est donc injective.

(b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$ et soit $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. Il est clair que $y \in \mathscr{S}_h$ car $\mathscr{S}_h$ est un espace vectoriel. Un simple calcul donne alors

$$y(t_0) = \alpha \quad \text{et} \quad y(t_0) = \beta,$$

soit $\varphi(y) = (\alpha, \beta)$.
φ est donc surjective.

Ainsi, φ est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, donc $\dim(\mathscr{S}_h) = \dim(\mathbf{K}^2) = 2$.

□

Exemple 1. On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{t^2} y = 0. \tag{3}$$

Les fonctions $y_1 : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ et $y_2 : t \longmapsto t^2$ sont des solutions non colinéaires de (3), ainsi toute solution de (3) sest de la forme

$$y : t \longmapsto \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

Exemple 2. On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{1}{t} y' + \frac{1}{t^2} y = 0. \tag{4}$$

Les fonctions $y_1 : t \longmapsto t$ et $y_2 : t \longmapsto t \ln(t)$ sont des solutions non colinéaires de (4), ainsi toute solution de (4) est de la forme

$$y : t \longmapsto \alpha t + \beta t \ln(t) \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

Proposition 2. *Principe de superposition.*

Soient c_1, c_2 deux fonctions définies sur I, continues sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$. Soient y_1 et y_2 des solutions de

$$y_1'' + a(t) y_1' + b(t) y_1 = c_1(t) \quad \text{et} \quad y_2'' + a(t) y_2' + b(t) y_2 = c_2(t).$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + a(t) y' + b(t) y = \lambda c_1(t) + \mu c_2(t).$$

Démonstration. La preuve est claire : elle utilise simplement la linéarité de la dérivation.

□

Proposition 3. *Soit $y_p : I \longrightarrow \mathbf{K}$ une solution particulière de l'équation différentielle* (1)*. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (1) *est l'ensemble des fonctions y de la forme $y = y_p + y_h$ où y_h est une solution de l'équation homogène* (2)*.*

Démonstration. On commence que remarquer que pour toute fonction $y : I \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fois dérivable

$$y \text{ est solution de (1)} \iff y - y_p \text{ est solution de (2).} \tag{5}$$

En notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1), on peut alors prouver

$$\mathscr{S} = \{y_p + y_h,\ y_h \text{ solution de (2)}\}.$$

- $\boxed{\subset}$ Si $y \in \mathscr{S}$, d'après (5), $y - y_p$ est solution de (2), il existe $y_h \in \mathscr{S}_h$ tel que $y - y_p = y_h$, soit $y = y_p + y_h$.
- $\boxed{\supset}$ Si $y \in \{y_p + y_h,\ y_h \text{ solution de (2)}\}$, on peut écrire $y = y_p + y_h$ avec $y_h \in \mathscr{S}_h$, donc $y_h = y - y_p \in \mathscr{S}_h$. D'après (5), $y \in \mathscr{S}$.

□

Exemple 3. On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = -\frac{3}{t^3}. \tag{6}$$

La fonction $y_p : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est solution particulière de (6). On en déduit, en reprenant l'exemple 1, que l'ensemble des solutions de (6) sont les fonctions de la forme

$$y : t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

Exemple 4. On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}. \tag{7}$$

La fonction $y_p : t \longmapsto -1 - \ln(t)$ est solution de (7). On en déduit, en reprenant l'exemple 2, que l'ensemble des solutions de (7) sont les fonctions de la forme

$$y : t \longmapsto -1 - \ln(t) + \alpha t + \beta t \ln(t) \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

2 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

On fixe un entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$ et des coefficients $a_{i,j} \in \mathbf{K}$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On va étudier le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x_1' & = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' & = a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ & \vdots \\ x_n' & = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, \ldots, x_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}$ sont des fonctions dérivables. Si l'on pose

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

alors le système précédent est équivalent au système

$$X' = AX \tag{8}$$

d'inconnue $X : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

2.1 Problème de Cauchy

Théorème 2. *Théorème de Cauchy-Lipschitz, version matricielle.*
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $t_0 \in \mathbf{R}$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' & = AX \\ X(t_0) & = X_0 \end{cases}$$

admet une solution dérivable $X : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}$.

Démonstration. Admis. □

Proposition 4. *Structure de l'ensemble des solutions.*
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (8) *est un espace vectoriel de dimension n.*

Démonstration. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (8). Soit φ définie par

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{S} & \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto X(t_0) \end{cases}.$$

La linéarité de φ est claire. Montrons que φ est un isomorphisme.

(a) Soit $X \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. On a alors $X(t_0)$. On note $\mathbb{O} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ la fonction nulle.
Il est clair que $\mathbb{O}' = A\mathbb{O}$ et $\mathbb{O}(t_0) = 0$. En utilisant l'unicité dans le théorème 2, on a $X = \mathbb{O}$, ainsi φ est injective.

(b) Soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Le théorème 2 assure qu'il existe $X \in \mathscr{S}$ tel que $X(t_0) = Y$, soit $\varphi(X) = Y$, ce qui assure la surjectivité de φ.

Comme φ est un isomorphisme, on en déduit que $\dim(\mathscr{S}) = \dim(\mathbf{K}^n) = n$. □

Remarque 3. Lorsque A est diagonalisable, on pourra donner explicitement les solutions de (8).

2.2 Comportement asymptotique des solutions

Nous allons étudier le comportement asymptotique des solutions de (8) lorsque $t \to +\infty$.

Proposition 5. *Comportement asymptotique des solutions.*
On suppose que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

(i) *Les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative si, et seulement si, pour tout toute solution de* (8) *$X : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on a*

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative si, et seulement si, toute solution de* (8) *$X : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.*

Démonstration. Déjà, comme A est diagonalisable, A admet une base de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_n)$ associée à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si l'on pose la matrice $P = (e_1 | \cdots | e_n)$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(i) On traite les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On pose $Y = P^{-1}X$ de sorte que $Y' = P^{-1}X'$. Ainsi la relation $X' = AX = PDP^{-1}X$ donne $Y' = DY$. Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ce système donne donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i' = \lambda_i y_i.$$

Ainsi, on peut écrire : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $y_i(t) = A_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}$. Comme $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} y_i(t) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En posant $P = (p_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$, on a

$$\begin{cases} x_1 & = p_{1,1}y_1 + \cdots + p_{1,n}y_n \\ & \vdots \\ x_n & = p_{n,1}x_1 + \cdots + p_{n,n}x_n \end{cases}. \tag{9}$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = 0,$$

soit

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que A ait une valeur propre dont la partie réelle est strictement positive, par exemple λ_1. On reprend les notations utilisées ci-dessus. Comme P est inversible, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $p_{1,j} \neq 0$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Y' & = DY \\ Y(t_0) & = e_j \end{cases}$$

où $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (le 1 est en position j).

Il s'ensuit que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $y_j(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\lambda_j}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$, $y_i(t) = 0$.
En reprenant (9), on en déduit alors

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = \mathrm{sgn}(p_{1,j})\,\infty,$$

ce qui contredit le fait que $\lim_{t \to +\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) La preuve de (ii) est la même que celle de (i) en remarquant qu'une fonction continue X telle que $\lim_{t \to +\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

□

2.3 Liens entre les équations linéaires et les systèmes linéaires

On fixe $n \in \mathbf{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

d'inconnue une fonction $y : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}$ n fois dérivable.

On peut ramener l'étude de cette équation différentielle à l'étude d'un système différentielle suivant :

$$X' = AX$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. En effet si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{cases} x_1' & = x_2 \\ x_2' & = x_3 \\ \vdots & \\ x_{n-1}' & = x_n \\ x_n' & = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_0 x_1 \end{cases},$$

en particulier, $x_1^{(n)} = -a_{n-1}x_1^{(n-1)} - \cdots - a_0x_1$, soit finalement $x_1^{(n)} + a_{n-1}x_1^{(n-1)} + \cdots + a_0x_1 = 0$.

Remarque 4. Lorsque $n = 2$, si l'on considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{10}$$

avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, alors on peut lui associer le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' & = x_2 \\ x_2' & = -ax_2 - bx_1 \end{cases}.$$

En résolvant ce système différentiel, on en déduit les solutions de (10). On retrouve (heureusement !) les mêmes solutions qu'en utilisant la méthode avec l'équation caractéristique.

3 Exemples

Dans cette partie, on se donne I un intervalle de $\mathbf{R}$ non trivial. Soient aussi $a, b, c : I \longrightarrow \mathbf{K}$ trois fonctions continues. On s'intéresse à l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t)\,. \tag{11}$$

On rappelle qu'il n'y pas de méthode générale pour résoudre (11).

3.1 Méthode de la variation de la constante

On rappelle que l'équation homogène associée à (11) est

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0. \tag{12}$$

On peut appliquer la méthode de la variation de la constante si l'on connaît une solution $h : I \longrightarrow \mathbf{K}$ de l'équation homogène (12) qui ne s'annule pas sur I.

On peut suivre le plan suivant.

1. On pose $y = \lambda h$ où $\lambda : I \longrightarrow \mathbf{K}$ est une fonction deux fois dérivable sur I.
2. On a

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (11)} \quad & \iff \quad \lambda'' h + 2\lambda' y' + \lambda h'' + a(t)\left(\lambda' h + \lambda h'\right) + b(t)\,\lambda h = c(t) \\ & \iff \quad h\lambda'' + \left(2h' + a(t)\,h\right)\lambda' + \underbrace{\left(h'' + a(t)\,h' + b(t)\,h\right)}_{=0 \text{ car } h \text{ est solution de (12)}} \lambda = c(t) \\ & \iff \quad h\lambda'' + \left(2h' + a(t)\,h\right)\lambda' = c(t)\,. \end{aligned}$$

3. En posant $\mu = \lambda'$, on est ramené à résoudre l'équation différentielle suivante d'ordre 1
$$h\mu' + \left(2h' + a(t)\,h\right)\mu = c(t)\,.$$
On en déduit λ en primitivant μ, puis y en utilisant la relation $y = \lambda h$.

Exemple 5. Nous allons résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle
$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = t \iff t^2y'' - 3ty' + 4y = t^3. \tag{13}$$
On remarque que la fonction $h : t \longmapsto t^2$ est solution de l'équation homogène
$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0. \tag{14}$$
Comme h ne s'annule pas sur I, on peut lui appliquer la méthode de la variation de la constante. On pose $y = \lambda h$ où $\lambda : I \longrightarrow \mathbf{K}$ est une fonction deux fois dérivable.
$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de (13)} &\iff t^2\left(\lambda''h + 2\lambda'h' + \lambda h''\right) - 3t\left(\lambda'h + \lambda h'\right) + 4\lambda h = t^3\\
&\iff t^2h\lambda'' + \left(2t^2h' - 3th\right)\lambda' + \underbrace{\left(t^2h - 3th' + 4h\right)}_{=0 \text{ car } h \text{ est solution de (14)}}\lambda = t^3\\
&\iff t^4\lambda'' + \left(4t^3 - 3t^3\right)\lambda' = t^3\\
&\iff t\lambda'' + \lambda' = 1.
\end{aligned}$$
On pose $\mu = \lambda'$ et en résolvant l'équation différentielle $t\mu' + \mu = 1$, on trouve
$$\lambda'(t) = \mu(t) = \frac{A}{t} + 1 \quad \text{avec } A \in \mathbf{R}.$$
En primitivant, on trouve
$$\lambda(t) = A\ln(t) + t + B \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbf{R}^2.$$
Finalement, les solutions de (13) sont de la forme
$$y : t \longmapsto t^2\lambda(t) = At^2\ln(t) + Bt^2 + t^3 \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbf{R}^2.$$

3.2 Recherche d'une solution polynomiale

On peut essayer de rechercher des solutions de (11) sous forme polynomiale. ON peut suivre le plan suivant.

1. On commence par déterminer les degrés possibles pour le polynôme.
2. On substitue dans l'équation (11) et on identifie les coefficients.

Exemple 6. Cherchons les solutions polynomiales de l'équation différentielle
$$t(t+1)y'' + (t-1)y' - y = 0. \tag{15}$$
Supposons que (15) ait une solution polynomiale P de degré $n \in \mathbf{N}$. En notant a_nt^n le monôme de plus haut degré de cette solution (avec donc $a_n \neq 0$), le coefficient dominant de $t(t+1)P'' + (t-1)P' - P$ est $(n(n-1) + n - 1)\,a_nt^n$. Comme P est solution de (15), on en déduit que $n(n-1) + n - 1 = 0$, soit $n = 1$.

Ainsi, P est de degré 1, on peut écrire $P(t) = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbf{K}^2$. En substituant dans (15), on obtient
$$(t-1)\,a - (at + b) = 0 \iff b = -a.$$
Ainsi, $P(t) = a(t-1)$.

Les solutions polynomiales de (15) sont les fonctions polynomiales de la forme
$$P(t) = a(t-1) \quad \text{avec } a \in \mathbf{K}.$$
Remarque 5. Il est possible (et même fréquent) qu'une équation différentielle n'ait pas de solution polynomiale.

3.3 Rechercher des solutions développables en série entière

On peut essayer de chercher des solutions de (11) développables en série entière. On peut suivre le plan suivant, qui propose un raisonnement par analyse/synthèse.

1. *Analyse.* On suppose qu'une existe une solution de (11) développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence $R > 0$
$$\forall t \in \left]-R, R\right[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$
2. En substituant y dans (11), on trouve une relation de récurrence portant sur les suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
3. Si possible, on donne une expression explicite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et de y.
4. *Synthèse.* On considère la série entière avec l'expression de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trouvée lors de l'analyse.
   (a) Si le rayon de convergence est nul, on conclut que (11) n'a pas de solution développable en série entière.
   (b) Si le rayon de convergence R est strictement positif, alors y est une solution de (11) développable en série entière sur $\left]-R, R\right[$.

Exemple 7. On cherche les solutions développables en série entière de l'équation différentielle
$$y'' + 2ty' + 2y = 0. \tag{16}$$

On procède par analyse/synthèse.

Analyse. On suppose qu'il existe une solution y de (16) sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R > 0$. On écrit
$$\forall t \in \left]-R, R\right[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans (16), on a
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

En effectuant un changement d'indice dans la première et la seconde série, on a
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + (2n+2) a_n\right) t^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on a
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + (2n+2) a_n \iff a_{n+2} = -\frac{2}{n+2} a_n.$$

On remarque que l'on a alors
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} a_0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} a_1.$$

On en déduit que si y est solution de (16), alors
$$\begin{aligned} \forall t \in \left]-R, R\right[, \quad y(t) &= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &= a_0 \exp\left(-t^2\right) + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} t^{2n+1}. \end{aligned}$$

Synthèse. Les deux séries entières ont un rayon de convergence égal à $+\infty$. Ainsi, les solutions de (16) développables en série entière sont de la forme

$$y : t \longmapsto A\exp\left(-t^2\right) + B\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\, 4^n n!}{(2n+1)!}t^{2n+1} \quad \text{avec } (A,B)\in\mathbf{K}^2.$$

De plus, les fonctions $t \longmapsto \exp\left(-t^2\right)$ et $t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\, 4^n n!}{(2n+1)!}t^{2n+1}$ ne sont pas colinéaires car elles sont non nulles et l'une est paire et l'autre impaire. D'après la proposition 1, l'ensemble des solutions de (16) est un espace vectoriel de dimension 2. Ainsi, il n'y a pas d'autres solutions à celles que l'on vient de trouver.

Exemple 8. On cherche les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$t^2y' + (t-1)\,ty' = 1. \tag{17}$$

On procède par analyse/synthèse.

Analyse. On suppose qu'il existe une solution y de (17) sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R > 0$. On écrit

$$\forall t \in \left]-R, R\right[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans (17), on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 1.$$

En faisant un changement d'indice dans la première somme, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n-1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 1 \iff a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(n a_{n-1} - a_n\right)t^n = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on a

$$\left(a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n = n a_{n-1}\right) \iff \left(\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n = n!\right).$$

Ainsi, si y est solution de (17), on a

$$\forall t \in \left]-R, R\right[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n! t^n.$$

Synthèse. Le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est 0. Ainsi l'équation différentielle (17) n'admet pas de solution développable en série entière.

3.4 Résoudre un système linéaire

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On considère un système différentiel donné sous forme matricielle

$$X' = AX. \tag{18}$$

On peut suivre le plan ci-dessous pour le résoudre.

1. On commence par réduire la matrice A (éventuellement sur $\mathbf{C}$ si ses valeurs propres ne sont pas réelles). On détermine une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ diagonale ou triangulaire supérieure.

2. En remplaçant dans le système, on obtient
$$X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff Y' = TY$$
où l'on a posé $Y = P^{-1}X$.
3. On détermine les solutions Y du système différentiel $Y' = TY$.
4. En écrivant $X = PY$, on en déduit les solutions de (18).
5. Si l'on a des solutions complexes et que l'on veut obtenir les solutions réelles, on remplace les éléments de la base des solutions complexes qui sont conjugués par leur partie réelle et imaginaire.

Remarque 6. Il est inutile de connaître P^{-1} !

Exemple 9. On souhaite résoudre le système différentiel
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{=X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=X}. \tag{19}$$

En réduisant A sur $\mathbf{C}$, on a
$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on est ramené à résoudre le système différentiel
$$Y' = DY \iff \begin{cases} u' &= (2+2\mathrm{i})\, u \\ v' &= (2-2\mathrm{i})\, v \end{cases} \text{avec } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $u\,(t) = \lambda \mathrm{e}^{(2-2\mathrm{i})t}$ et $v\,(t) = \mu \mathrm{e}^{(2+2\mathrm{i})t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$, ainsi
$$Y\,(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{(2-2\mathrm{i})t} \\ \mu \mathrm{e}^{(2+2\mathrm{i})t} \end{pmatrix}.$$

En substituant $X = PY$, on trouve les solutions complexes de (19)
$$X\,(t) = \lambda \underbrace{\mathrm{e}^{(2+2\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix}}_{=X_1(t)} + \mu \underbrace{\mathrm{e}^{(2-2\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}}_{=X_2(t)} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

Une base des solutions complexes de (19) est (X_1, X_2). Les éléments X_1 et X_2 sont conjugués, donc pour obtenir les solutions réelles, on les remplace par leur partie partie réelle et imaginaire. Dans ce cas, on a
$$X_1\,(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix},$$

donc les solutions réelles de (19) sont
$$X\,(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix} + \beta \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

Exemple 10. On souhaite résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' &= 3x - y \\ y' &= x + y \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{=X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=X}. \tag{20}$$

A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable, on écrit
$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, Y est solution du système différentiel suivant

$$Y' = TY \iff \begin{cases} u' &= 2u + v \\ v' &= 2v \end{cases} \text{ avec } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $v(t) = \mu \mathrm{e}^{2t}$ avec $\mu \in \mathbf{R}$, puis que u est solution de l'équation différentielle linéaire

$$u' - 2u = \mu \mathrm{e}^{2t}.$$

Après résolution, on trouve $u(t) = (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{2t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Il s'ensuit que

$$Y(t) = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{2t} \\ \mu \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

En substituant dans $X = PY$, on trouve les solutions du système (20)

$$X(t) = (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,$$

ce qui se réécrit en

$$\begin{cases} x(t) &= 2\lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{2t}(2t + 1) \\ y(t) &= 2\lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{2t}(2t - 1) \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

4 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir pour les concours.

4.1 Lemme de Gronwall

Proposition 6. *Lemme de Gronwall.*
Soient φ, ψ et y trois fonctions définies, continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs positives et vérifiant

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, \mathrm{d}s. \tag{21}$$

Alors,

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\, \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s.$$

Démonstration. Soit $F(t) = \displaystyle\int_a^t \psi(s)\, y(s)\, \mathrm{d}s$. En multipliant les deux membres de (21) par $\psi(t) \geq 0$, on obtient $F'(t) - \psi(t)\, F(t) \leq \varphi(t)\, \psi(t)$, ce qui s'écrit aussi

$$G'(t) \leq \varphi(t)\, \psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)\, \mathrm{d}s\right)$$

avec $G(t) = F(t) \exp\left(-\displaystyle\int_a^t \psi(s)\, \mathrm{d}s\right)$.

Comme $G(a) = F(a) = 0$, par intégration, on en déduit

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\, \psi(s) \exp\left(-\int_a^s \psi(u)\, \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s.$$

Or, d'après (21), $y(t) \leq \varphi(t) + G(t) \displaystyle\int_a^t \psi(s)\, \mathrm{d}s$, d'où l'inégalité en utilisant l'inégalité ci-dessus.

□

Corollaire 1. *Soit $c \geq 0$. Soient ψ et y deux fonctions définies, continues sur un segment $[a,b]$ à valeurs positives et vérifiant*

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, \mathrm{d}s.$$

Alors,

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, \mathrm{d}s\right).$$

Démonstration. Il s'agit de la proposition 21 lorsque la fonction φ est constante égale à c. Pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s = c - c\left[\exp\left(\int_s^t \psi(u)\, \mathrm{d}u\right)\right]_a^t = c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, \mathrm{d}s\right).$$

□

4.2 Quelques équations différentielles d'ordre 2

Cette sous-partie donne « quelques recettes » pour résoudre des équations différentielles classiques. Si vous décidez de vous en servie, c'est à vous de rédiger proprement en résolvant les équations différentielles sur des intervalles adéquats.

4.2.1 Équation d'Euler

Définition 2. *Équation d'Euler.*
C'est une équation différentielle du type

$$at^2y'' + bty' + cy = 0$$

avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$.

Pour résoudre cette équation différentielle, on peut suivre le plan suivant.

1. On commence par résoudre l'équation sur $\mathbf{R}_+^*$. On pose $z(u) = y(\mathrm{e}^u)$.
2. On montre que z vérifie une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.
3. On trouve z, puis y sur $\mathbf{R}_+^*$.
4. On procède de même sur $\mathbf{R}_-^*$ en posant $z(u) = y(-\mathrm{e}^u)$.
5. On étudie le raccordement des solutions en 0.

Exemple 11. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$t^2y'' + 3ty' - 3y = 0. \tag{22}$$

Solution. On reconnaît une équation d'Euler.

(i) *Résolution sur $\mathbf{R}_+^*$.*
On pose $z(u) = y(\mathrm{e}^u)$. On remarque que l'on a

$$z'(u) = \mathrm{e}^u y'(\mathrm{e}^u) \quad \text{et} \quad z''(u) = \mathrm{e}^{2u} y''(\mathrm{e}^u) + \mathrm{e}^u y'(\mathrm{e}^u).$$

Or, en substituant t par e^u dans (22), on a

$$\mathrm{e}^{2u} y''(\mathrm{e}^u) + 3\mathrm{e}^u y'(\mathrm{e}^u) - 3y(\mathrm{e}^u) = 0.$$

Ainsi, on a $z'' + 2z' - 3z = 0$. Ainsi,

$$z(u) = A\mathrm{e}^u + B\mathrm{e}^{-3u} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbf{R}^2.$$

Comme $y(t) = z(\ln(t))$, on en déduit

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\ln(t)} + B\mathrm{e}^{-3\ln(t)} = At + \frac{B}{t^3} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbf{R}^2.$$

(ii) *Résolution sur* $\mathbf{R}_-^*$.
On pose $z(u) = y(-\mathrm{e}^u)$. On remarque que l'on a

$$z'(u) = -\mathrm{e}^u y'(-\mathrm{e}^u) \quad \text{et} \quad z''(u) = \mathrm{e}^{2u} y''(-\mathrm{e}^u) - \mathrm{e}^u y'(-\mathrm{e}^u).$$

Or, en substituant t par $-\mathrm{e}^u$ dans (22), on a

$$\mathrm{e}^{2u} y''(-\mathrm{e}^u) - 3\mathrm{e}^u y'(-\mathrm{e}^u) - 3y(-\mathrm{e}^u) = 0.$$

Ainsi, on a $z'' + 2z' - 3z = 0$. Ainsi,

$$z(u) = C\mathrm{e}^u + D\mathrm{e}^{-3u} \quad \text{avec } (C, D) \in \mathbf{R}^2.$$

Comme $y(t) = z(\ln(-t))$, on en déduit

$$y(t) = C\mathrm{e}^{\ln(-t)} + D\mathrm{e}^{-3\ln(-t)} = -Ct - \frac{D}{t^3} \quad \text{avec } (C, D) \in \mathbf{R}^2.$$

(iii) *Raccord en* 0.
Pour assurer la continuité de y en 0, il faut que $B = D = 0$. De même, pour assurer la dérivabilité de y en 0, il faut que $A = -C$.
Réciproquement, si $y(t) = At$, il est clair que y est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et est solution de (22) sur $\mathbf{R}$.
Les solutions de (22) sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto at$ avec $a \in \mathbf{R}$.

Remarque 7. On remarque que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1. Cela ne contredit pas le résultat de la proposition 1 car cette proposition l'équation différentielle était de la forme $y'' + a(t) y' + b(t) y = 0$ et cela change tout !

4.2.2 Équation de Bernoulli

Définition 3. *Équation de Bernoulli.*
C'est une équation différentielle du type

$$y' = a(t) y + b(t) y^\alpha \tag{23}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ *et* $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$ *sont deux fonctions continues sur l'intervalle* I.

Pour résoudre cette équation différentielle, on peut suivre le plan suivant.

1. On cherche les solutions qui ne s'annulent pas, ou, si α n'est pas entier, celles qui sont strictement positives.
2. On divise (23) par y^α pour obtenir
$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(t) \frac{1}{y^{\alpha-1}} + b(t),$$
soit, si l'on pose $z = y^{1-\alpha}$,
$$\frac{1}{1-\alpha} z' = a(t) z + b(t).$$
3. On résout cette équation différentielle, on en déduit z, puis y.

Exemple 12. Résoudre l'équation différentielle

$$y' + y = y^2 t^2. \tag{24}$$

Solution. On remarque que la fonction nulle est solution.
On suppose que y ne s'annule pas.
On reconnaît une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. On divise (24) par y^2 pour obtenir

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = t^2.$$

On pose $z = \dfrac{1}{y}$ de sorte que $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$, ainsi la ligne précédente se réécrit en

$$-z' + z = t^2.$$

La résolution de cette équation différentielle du premier ordre ne pose pas de problème (on cherche une solution de l'équation homogème sous une forme polynomiale), ainsi

$$z(t) = A\mathrm{e}^t + \left(t^2 + 2t + 2\right) \quad \text{avec } A \in \mathbf{R}.$$

On en déduit que

$$y(t) = \frac{1}{A\mathrm{e}^t + t^2 + 2t + 2} \quad \text{avec } A \in \mathbf{R}.$$

On notera que, si $A < 0$, alors le dénominateur s'annule et la solution n'est donc pas définie sur $\mathbf{R}$. Par contre, lorsque $A \geq 0$, la solution est bien définie sur $\mathbf{R}$.

4.2.3 Équation de Ricatti

Définition 4. *Équation de Ricatti.*
C'est une équation différentielle du type

$$y' = a(t)\, y + b(t)\, y^2 + c(t) \tag{25}$$

avec $a, b, c : I \longrightarrow \mathbf{R}$ *trois fonctions continues.*

Remarque 8. Une équation de Ricatti est donc une sorte d'équation de Bernoulli non homogène avec $\alpha = 2$. On se ramène d'ailleurs à la résolution d'une équation de Bernoulli.

Pour résoudre cette équation différentielle, on peut suivre le plan suivant.

1. Trouver une solution particulière φ (ou alors regarder si l'énoncé n'en souffle pas une).
2. On pose $z = y - \varphi$. On montre que y est solution est solution de (25) si, et seulement si, z est solution de $z' = \left(a(t) + 2b(t)\,\varphi(t)\right) z + b(t)\, z^2$.
3. z vérifie donc une équation de Bernoulli que l'on résout. On en déduit finalement y.

Remarque 9. Le gros point faible est évidemment le fait que l'on dispose d'une solution particulière.

Exemple 13. Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 2ty + y^2 + t^2 - 1. \tag{26}$$

Solution. On remarque que $\varphi(t) = -t$ est une solution particulière de (26). On pose $z = y - \varphi$. On montre alors que z est solution de $z' = z^2$.

C'est une équation de Bernoulli, mais on peut intégrer cette équation différentielle. On a $z' = z^2 \iff z'z^{-2} = 1$. En primitivant, on a $z^{-1}(t) = -t + c$ avec $c \in \mathbf{R}$.

On en déduit alors que, en utilisant $y = z + \varphi$, que les solutions de (26) sont de la forme

$$y(t) = -t + \frac{1}{-t + c} \quad \text{avec } c \in \mathbf{R}.$$

On remarquera que les solutions de (26) ne sont pas définies sur $\mathbf{R}$.