

## CORRIGE

## I Etude des torseurs

### I.A - L'espace $\mathcal{T}$ des torseurs

**I.A.1)** Soit  $A$  et  $B \in \mathcal{E}$  :

$$\mathcal{M}(B) = \vec{v} \wedge \vec{OB} = \vec{v} \wedge (\vec{OA} + \vec{AB}) = \vec{v} \wedge \vec{OA} + \vec{v} \wedge \vec{AB} = \mathcal{M}(A) + \vec{v} \wedge \vec{AB}$$

L'application  $\mathcal{M}$  est bien un torseur.

**I.A.2)** L'ensemble des torseurs est non vide d'après la question précédente.

Soit  $T_1$  et  $T_2$  deux torseurs, et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Il existe donc deux vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  "associés" respectivement à  $T_1$  et  $T_2$ .

$$\text{Soit } A \text{ et } B \in \mathcal{E} : (\lambda T_1 + T_2)(B) = \lambda T_1(B) + T_2(B) = \lambda (T_1(A) + \vec{r}_1 \wedge \vec{AB}) + T_2(A) + \vec{r}_2 \wedge \vec{AB}$$

$$= (\lambda T_1 + T_2)(A) + (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \wedge \vec{AB}$$

Ainsi, l'application  $\lambda T_1 + T_2$  est un torseur et par conséquent  $\mathcal{T}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}})$ .

**I.A.3)a)**  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**I.A.3)b)** Soit  $\mathcal{M}$  un torseur. Soit  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  deux vecteurs "associés" à  $\mathcal{M}$ .

On considère trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés de  $\mathcal{E}$ .

$$\text{On a donc } \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \vec{r}_1 \wedge \vec{AB} = \mathcal{M}(A) + \vec{r}_2 \wedge \vec{AB} \text{ donc } (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{AB} = \vec{0}.$$

D'après la question précédente, le vecteur  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  est donc colinéaire à  $\vec{AB}$ .

On montre de même que le vecteur  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  est colinéaire à  $\vec{AC}$ .

Le vecteur  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  est donc colinéaire à deux vecteurs de  $\mathcal{E}$  eux-mêmes non colinéaires : c'est le vecteur nul.

Ainsi,  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$  ce qui prouve que le vecteur  $\vec{r}$  de la définition est unique.

**I.A.4)** Soit  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ .

On considère l'application  $\mathcal{M}$  constante, qui à tout point  $A \in \mathcal{E}$  associe  $\vec{u}$ .

Soit  $A$  et  $B \in \mathcal{E}$  :  $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A) + \vec{0} \wedge \vec{AB}$  donc l'application  $\mathcal{M}$  est un torseur, de résultante (unique d'après la question précédente) le vecteur nul.

L'ensemble des couples est bien entendu non vide.

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{M}_1$  (resp.  $\mathcal{M}_2$ ) deux couples. Il existe donc un vecteur  $\vec{u}_1$  (resp.  $\vec{u}_2$ ), image de tout point de  $\mathcal{E}$ .

Soit  $A \in \mathcal{E}$  :  $(\lambda \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)(A) = \lambda \mathcal{M}_1(A) + \mathcal{M}_2(A) = \lambda \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  donc l'application  $\lambda \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  est un torseur constant : c'est un couple et par conséquent l'ensemble  $\mathcal{E}$  des couples est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{T}$ .

$$\text{Soit } F : \begin{cases} \mathcal{C} & \rightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{E} & \rightarrow \mathcal{M}(O) \end{cases}$$

Soit  $C_1$  et  $C_2 \in \mathcal{C}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $F(\lambda C_1 + C_2) = (\lambda C_1 + C_2)(O) = \lambda C_1(O) + C_2(O) = \lambda F(C_1) + F(C_2)$  donc l'application  $F$  est linéaire.

L'application  $F$  est de toute évidence surjective.

Soit  $C$  un couple tel que  $F(C) = \vec{0}$  : on a donc  $C(O) = \vec{0}$  et comme  $C$  est un couple  $C(M) = \vec{0}$  pour tout  $M \in \mathcal{E}$  donc  $C$  est le couple nul et  $F$  est donc injective.

$F$  est donc un isomorphisme.

Ainsi,  $\dim \mathcal{C} = \dim \vec{\mathcal{E}} = 3$ .

**I.A.5)a)** Soit  $A_0$  et  $A_1$  les points de  $\mathcal{E}$  tels que  $\overrightarrow{OA_0} = \vec{r}$  et  $\overrightarrow{O_1A_1} = \vec{r}$ .

On alors  $g_0(A_0) = g_1(A_1) = \vec{0}$  donc  $g_0$  et  $g_1$  sont des glisseurs.

Supposons qu'il existe  $A \in \mathcal{E}$  tel que  $(g_0 - g_1)(A) = \vec{0}$  : on a alors  $\vec{r} \wedge \overrightarrow{OA} - \vec{r} \wedge \overrightarrow{O_1A} = \vec{0}$  soit  $\vec{r} \wedge \overrightarrow{O_1O} = \vec{0}$  ce qui implique que  $\vec{r}$  et  $\overrightarrow{O_1O}$  sont colinéaires : ainsi l'application  $g_0 - g_1$  ne s'annule pas et n'est pas un glisseur.

On a trouvé une combinaison linéaire  $g_0 - g_1$  de vecteurs de  $\mathcal{G}$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{G}$  donc l'ensemble  $\mathcal{G}$  des glisseurs n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{T}$ .

**I.A.5)b)** L'ensemble  $\mathcal{G}_0$  des glisseurs s'annulant en  $O$  n'est pas vide puisqu'il contient l'application  $g_0$  définie à la question précédente.

Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux glisseurs de  $\mathcal{G}_0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$\lambda G_1 + G_2$  est un torseur et il est évident qu'il s'annule en  $O$  donc  $\lambda G_1 + G_2 \in \mathcal{G}_0$  qui est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{T}$ .

Soit  $F : \begin{cases} \mathcal{G}_0 & \rightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto \vec{r} \end{cases} : F$  est la restriction de l'application linéaire  $\begin{cases} \mathcal{T} & \rightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto \vec{r} \end{cases}$  (définie à

la question **I.A.3)b)**) donc  $F$  est linéaire.

Soit  $\vec{r} \in \vec{\mathcal{E}}$  : l'application  $A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$  est un torseur qui s'annule en  $O$  donc c'est un glisseur de  $\mathcal{G}_0$  et  $F$  est surjective.

Soit  $\mathcal{M} \in \mathcal{G}_0$  un glisseur de résultante nulle : un raisonnement identique à celui de la question **I.A.4)** prouve que  $\mathcal{M}$  est le glisseur nul donc  $F$  est injective.

$F$  est donc un isomorphisme.

Ainsi,  $\dim \mathcal{G}_0 = \dim \vec{\mathcal{E}} = 3$ .

**I.A.5)c)** Soit  $\mathcal{M}$  un torseur de  $\mathcal{T}$ , de résultante  $\vec{r}$  : pour tout point  $A$  de  $\mathcal{E}$ , on a donc :

$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(O) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$  donc  $\mathcal{M}$  est la somme d'une application constante (qui à tout point  $A$  associe  $\mathcal{M}(O)$ ) et d'un élément de  $\mathcal{G}_0$  : on a  $\mathcal{T} = \mathcal{C} + \mathcal{G}_0$ .

Soit  $\mathcal{M}$  un torseur constant qui s'annule en  $O$  :  $\mathcal{M}$  est donc le torseur nul et  $\mathcal{C} \cap \mathcal{G}_0 = \emptyset$ .

Ainsi, on a bien  $\mathcal{T} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{G}_0$  et donc  $\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{G}_0 = 6$ .

## I.B - Equiprojectivité

**I.B.1)** Soit  $\mathcal{M}$  un torseur de résultante  $\vec{r}$  et  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{M}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathcal{M}(B) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{AB} = \mathcal{M}(B) \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{r} \wedge \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Or,  $\vec{r} \wedge \overrightarrow{BA}$  est un vecteur orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  donc  $\vec{r} \wedge \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$  et par conséquent  $\mathcal{M}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \mathcal{M}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$

**I.B.2)a)** Une matrice antisymétrique est une matrice  $A$  telle que  ${}^t A = -A$ .

$$\text{I.B.2)b) Soit } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{E}} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ -x+3z \\ -2x-3y \end{pmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{u} \text{ avec } \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**I.B.3)a)** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

On veut montrer que  $f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$ .

Comme le suggère l'énoncé, considérons le vecteur  $\vec{w} = f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) - \lambda f(\vec{u}) - \mu f(\vec{v})$  et un vecteur  $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}$ .

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{x} &= [f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) - \lambda f(\vec{u}) - \mu f(\vec{v})] \cdot \vec{x} = f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{x} - \lambda f(\vec{u}) \cdot \vec{x} - \mu f(\vec{v}) \cdot \vec{x} \\ &= -(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot f(\vec{x}) - \lambda \vec{u} \cdot f(\vec{x}) - \mu \vec{v} \cdot f(\vec{x}) \\ &= -\lambda (\vec{u} \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{u}) \cdot \vec{x}) - \mu (\vec{v} \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{v}) \cdot \vec{x}) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur  $\vec{w}$  est orthogonal à tout vecteur  $\vec{x}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  donc c'est le vecteur nul et par conséquence,  $f$  est linéaire.

**I.B.3)b)** Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Le coefficient  $a_{ij}$  représente la composante du vecteur  $f(\vec{e}_j)$  selon le vecteur  $\vec{e}_i$ . On a donc  $a_{ij} = f(\vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i = -f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = -a_{ji}$ .

Ainsi, on a  ${}^t A = -A$  donc  $A$  est une matrice antisymétrique.

**I.B.3)c)** Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  : on a donc  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{E}}$  :  $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} a_{12}y + a_{13}z \\ -a_{12}x + a_{23}z \\ -a_{13}x - a_{23}y \end{pmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{u}$  avec  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -a_{23} \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{pmatrix}$ .

**I.B.4)** Soit  $\mathcal{M}$  une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$  vérifiant la propriété d'équiprojectivité.

On considère l'application  $f : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$  définie par  $f(\vec{u}) = \mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O)$  où  $O'$  est le point tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$ .

Il s'agit ici de montrer que cette fonction  $f$  vérifie la propriété étudiée en **I.B.3)**.

Soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $\vec{\mathcal{E}}$ , et soit  $P$  le point tel que  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ .

On a alors  $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = [\mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O)] \cdot \overrightarrow{OP} = \mathcal{M}(O') \cdot \overrightarrow{OP} - \mathcal{M}(O) \cdot \overrightarrow{OP}$   
 $= \mathcal{M}(O') \cdot \overrightarrow{OO'} + \mathcal{M}(O') \cdot \overrightarrow{O'P} - \mathcal{M}(O) \cdot \overrightarrow{OO'} - \mathcal{M}(O) \cdot \overrightarrow{O'P}$ .

Or,  $\mathcal{M}$  vérifie la propriété d'équiprojectivité donc  $\mathcal{M}(O') \cdot \overrightarrow{OO'} = \mathcal{M}(O) \cdot \overrightarrow{OO'}$  donc  $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \mathcal{M}(O') \cdot \overrightarrow{O'P} - \mathcal{M}(O) \cdot \overrightarrow{O'P}$ .

De même, on montre que  $\vec{u} \cdot f(\vec{v}) = \mathcal{M}(O) \cdot \overrightarrow{O'P} - \mathcal{M}(P) \cdot \overrightarrow{O'P}$ .

On a donc  $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot f(\vec{v}) = \mathcal{M}(O') \cdot \overrightarrow{O'P} - \mathcal{M}(P) \cdot \overrightarrow{O'P} = \vec{0}$  puisque  $\mathcal{M}$  vérifie la propriété d'équiprojectivité.

Ainsi,  $f$  vérifie la propriété étudiée en **I.B.3)** donc il existe un vecteur  $\vec{r}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  tel que pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$ , on ait  $f(\vec{u}) = \vec{r} \wedge \vec{u}$ .

On a donc, pour tout point  $O'$  de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{M}(O') = \mathcal{M}(O) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{OO'}$  et donc  $\mathcal{M}$  est un torseur d'après la question **I.A.5)c)**.

## II Produits infinis

### II.A - Définitions et premières propriétés

**II.A.1)a)** Soit  $n \geq 2$  :  $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ .

Pour  $N \geq 2$ , on a donc  $P_N = \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{N-1}{N-2} \times \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$

Ainsi,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N = 0$  donc le produit infini  $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$  diverge.

**II.A.1)b)** Soit  $n \geq 2$  :  $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$ .

Pour  $N \geq 2$ , on a donc  $P_N = \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n}\right) \left(\prod_{n=2}^N \frac{n+1}{n}\right)$

$\prod_{n=2}^N \frac{n+1}{n} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{N}{N-1} \times \frac{N+1}{N} = \frac{N+1}{2}$

$P_N = \frac{1}{N} \times \frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2N}$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N = \frac{1}{2}$  donc  $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  converge vers  $\frac{1}{2}$ .

**II.A.2)a)** Supposons qu'il existe  $n \geq n_0$  tel que  $u_n = 0$ . On a alors :  $\forall N \geq n, P_N = 0$  et le produit infini  $\prod_{n \geq n_0} u_n$  diverge.

**II.A.2)b)** On suppose que le produit infini  $\prod_{n \geq n_0} u_n$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}^*$ .

Soit  $N \geq n_0$ . On remarque que  $\frac{P_{N+1}}{P_N} = \frac{\prod_{n=n_0}^{N+1} u_n}{\prod_{n=n_0}^N u_n} = u_{N+1}$ .

$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_{N+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} P_N = \ell$  et donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{P_{N+1}}{P_N} = 1$  et donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = 1$ .

**II.A.2)c)** Cette condition n'est pas suffisante comme le prouve le contre-exemple étudié à la question **II.A.1)a)**.

**II.A.3)a)** Soit  $N \geq n_0$ . La suite  $u_n$  est à termes strictement positifs donc  $P_N > 0$ .

On a  $\ln(P_N) = \ln\left(\prod_{n=n_0}^N u_n\right) = \sum_{n=n_0}^N \ln u_n$ .

Supposons que  $P_N$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}^*$  alors, la fonction  $\ln$  étant continue sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $\ln(P_N)$  converge vers  $\ln(\ell)$  donc la série de terme général  $\ln(u_n)$  converge vers  $\ln(\ell)$ .

Réciproquement, supposons que la série de terme général  $\ln(u_n)$  converge vers  $K \in \mathbb{R}$  alors, la fonction  $\exp$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\exp\left[\sum_{n \geq n_0} \ln u_n\right]$  converge vers  $\exp K$ , donc le produit infini de terme général  $u_n$  converge vers  $\exp K$ .

On a bien montré l'équivalence, et dans ce cas on a  $\sum_{n \geq n_0} \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{n \geq n_0} u_n\right)$ .

**II.A.3)b)** On suppose que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n > 0$  donc  $\ln(1 - u_n)$  existe.

D'après la question précédente, le produit infini  $\prod_{n \geq n_0}$  converge si et seulement si la série de terme général  $\ln(1 - u_n)$  converge.

Or, on a  $\ln(1 - u_n) \underset{+\infty}{\sim} -u_n$  donc la série de terme général  $\ln(1 - u_n)$  converge si et seulement si la série de terme général  $u_n$  converge.

**II.A.3)c)** En utilisant la question précédente,  $\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$  est de même nature que la série de terme général  $q^n$  qui est une série convergente.

**II.B - Développement en produit infini de  $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$**

**II.B.1)** Les deux fonctions dont on veut démontrer l'égalité sont impaires donc si cette égalité est vérifiée pour  $x \in ]0, 1[$  elle est vérifiée pour  $-x$ .

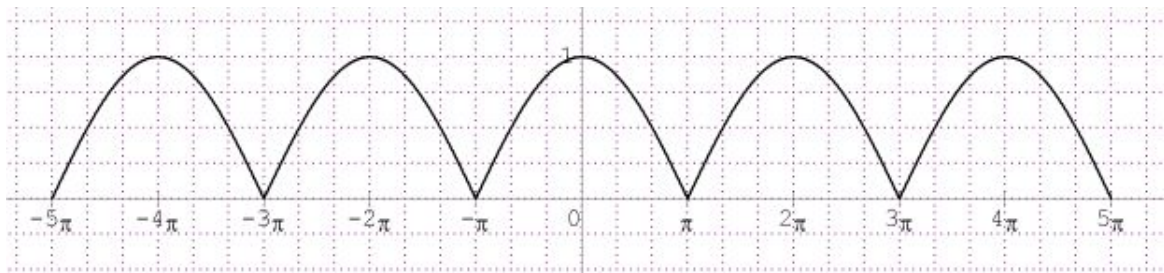
**II.B.2)** En utilisant la question **II.A.3)b)**, le produit infini  $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$  est de même nature que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{n^2}$ .

On sait que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{n^2}$  est convergente, ainsi que le produit infini  $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ .

**II.B.3a)**  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  et  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$  donc on a bien :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)).$$

**II.B.3b)**



Il est évident que  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .

Il suffit de prouver que  $f$  est continue en  $\pi$  par périodicité.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \cos(\pi x) = f(\pi).$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x - 2\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \cos(-x\pi) = f(\pi).$$

$f$  est continue en  $\pi$  donc sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est clairement de classe  $C^1$  sur tout intervalle du type  $](2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi[$  donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est paire donc  $b_n = 0$  pour tout entier  $n$ .

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(xt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^\pi = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

$$\text{Soit } n \geq 1, \text{ on a } a_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt.$$

$$\text{On utilise la question II.B.3a) : } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((x+n)t) + \cos(x-n)t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin((x+n)t)}{x+n} + \frac{\sin((x-n)t)}{x-n} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin((x+n)\pi)}{x+n} + \frac{\sin((x-n)\pi)}{x-n} \right).$$

Si  $n$  est pair, on a  $\sin(x\pi + n\pi) = \sin(x\pi - n\pi) = \sin(x\pi)$ .

Si  $n$  est impair, on a  $\sin(x\pi + n\pi) = \sin(x\pi - n\pi) = -\sin(x\pi)$

Finalement,  $\sin((x+n)\pi) = (-1)^n \sin(x\pi)$  et  $\sin((x-n)\pi) = (-1)^n \sin(x\pi)$ .

$$\text{On a donc } a_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) = \frac{2x \times (-1)^n}{\pi} \times \frac{\sin(x\pi)}{x^2 - n^2}$$

**II.B.3c)**  $f$  est  $2\pi$ -périodique, continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  : elle satisfait donc aux hypothèses du théorème de Dirichlet :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(n\omega t) + b_n(f) \sin(n\omega t)).$$

Or, on a  $\omega = 1$ , l'égalité étant vraie sur  $\mathbb{R}$  elle est vraie sur  $[-\pi, \pi]$  et on a donc :

$$\cos(xt) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \left( \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2} \cos(nt) \right)$$

**II.B.3d)** On applique l'égalité précédente à  $t = \pi$  : on a donc

$$\cos(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \left( \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2} \cos(n\pi) \right).$$

$$\text{On a } \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ donc } \cos(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \left( \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \right)$$

Comme  $\sin(\pi x) \neq 0$ , on divise l'égalité précédente par  $\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$  et on trouve :

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

**II.B.4)a)** On a  $u \cos u - \sin u \underset{0}{=} u \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) - \left(u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)\right) \underset{0}{=} -\frac{u^3}{3} + o(u^3)$ .

$$\pi \cot(\pi t) - \frac{1}{t} = \frac{\pi t \cos(\pi t) - \sin(\pi t)}{t \sin(\pi t)} \underset{0}{=} \frac{-(\pi t)^3/3 + o(t^3)}{\pi t^2 + o(t^2)} \underset{0}{\sim} -\frac{\pi^2 t}{3} \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} \left(\pi \cos(\pi t) - \frac{1}{t}\right) = 0.$$

La fonction  $t \mapsto \pi \cot(\pi t) - \frac{1}{t}$  est prolongeable par continuité en 0 donc l'intégrale  $I$ , impropre en 0, est convergente.

**II.B.4)b)**  $\frac{\sin u}{u} \underset{0}{=} \frac{u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)}{u} \underset{0}{=} 1 - \frac{u^2}{6} + o(u^2)$  donc  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ .

On a donc  $\ln\left(\frac{\sin u}{u}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{\sin u}{u} - 1\right)\right) \underset{0}{=} \frac{\sin u}{u} - 1 + o(u^2) \underset{0}{=} -\frac{u^2}{6} + o(u^2)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\sin(\pi \epsilon)}{\pi \epsilon}\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{(\pi \epsilon)^2}{6} + o(\epsilon^2) = 0$$

**II.B.4)c)** Soit  $\epsilon > 0$  : on a  $I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^x \pi \cot(\pi t) - \frac{1}{t} dt$ .

Comme le suggère l'énoncé, on dérive la fonction  $\ln\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)$ , et on trouve  $\pi \cot(\pi t) - \frac{1}{t}$ .

On a donc  $I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \ln\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right) \right]_{\epsilon}^x$

Donc  $I = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\sin(\pi \epsilon)}{\pi \epsilon}\right) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$  d'après la question précédente.

**II.B.4)d)** Soit  $t \in [0, 1]$ . Pour  $n \geq 2$ ,  $n^2 - t^2 \neq 0$  donc  $\frac{2t}{n^2 - t^2}$  existe.

Pour tout  $n \geq 2$ ,  $\frac{2t}{n^2 - t^2} > 0$  donc on peut appliquer les critères sur les séries à termes positifs.

$\frac{2t}{n^2 - t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2t}{n^2}$ , terme général d'une série de même nature que la série de Riemann

convergente de terme général  $\frac{1}{n^2}$ .

Finalement, la série de terme général  $\frac{2t}{n^2 - t^2}$  converge et la quantité  $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}$  est définie.

**II.B.4)e)** On applique la question précédente avec  $t = 1$  : la série de terme général  $\frac{2}{n^2 - 1}$  est

convergente, la quantité  $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$  est le reste d'ordre  $N$  de cette série donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = 0.$$

**II.B.4)f)** Soit  $t \in [0, 1[$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $n \geq N + 1$  :

On a  $0 < n^2 - 1 \leq n^2 - t^2$  donc  $0 \leq \frac{1}{n^2 - t^2} \leq \frac{1}{n^2 - 1}$ .

On a aussi  $0 \leq 2t \leq 2$  donc  $0 \leq \frac{2t}{n^2 - t^2} \leq \frac{2}{n^2 - 1}$ .

$$\forall t \in [0, 1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$$

**II.B.4)g)** On a  $I = \int_0^x \pi \cot(\pi t) - \frac{1}{t} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} dt$  d'après la question **II.B.3)d)**.

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  : on a donc  $I = \int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{2t}{t^2 - n^2} dt + \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} dt$ .

Soit  $I - \sum_{n=1}^N \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2} dt = \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} dt$

D'après la question précédente, on a  $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$  donc, en utilisant

l'inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} dt \right| \leq \int_0^x \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2} \right| dt \leq \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left| \frac{2t}{t^2 - n^2} \right| dt \leq \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1} dt = x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}.$$

Finalement, comme  $I = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$  d'après la question **II.B.4)c)**, on a :

$$\left| \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \sum_{n=1}^N \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2} dt \right| \leq x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$$

**II.B.4)h)** D'après la question **II.B.4)e)**, on a  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = 0$  donc la série

$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2} dt$  converge vers  $\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$  d'après la question précédente.

Une primitive de  $t \mapsto \frac{2t}{t^2 - n^2}$  sur  $[0, x]$  est  $\ln(n^2 - t^2)$  donc  $\int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2} dt = \ln\left(\frac{n^2 - x^2}{n^2}\right)$ .

On a donc  $\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 - x^2}{n^2}\right)$ .

D'après la question **II.A.3)a)**, le produit infini  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 - x^2}{n^2}\right)$  converge donc vers  $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  et finalement :

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 - x^2}{n^2}\right) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

**II.B.5)a)i)** On sait que la série de terme général  $\frac{1}{4n^2}$  converge donc d'après la question

**II.A.3)b)** le produit infini  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$  converge.

**II.B.5)a)ii)** A l'aide de la formule établie à la question **II.B.4)h)** et pour  $x = \frac{1}{2}$ , on trouve :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

**II.B.5)b)i)** Pour  $a > 1$ , la série de terme général  $\frac{1}{n^a}$  est une série de Riemann convergente donc  $\zeta$  est définie sur  $]1, +\infty[$ .

**II.B.5)b)ii)**  $\sin(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)$ .

**II.B.5)b)iii)** Le terme de degré 3 du développement limité de  $\sin(\pi x)$  en 0 est  $-\frac{\pi^3}{6}$ .

On utilise le développement en produit infini de  $\sin(\pi x)$  établi à la question **II.B.4)h)** :

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$\sin(\pi x) = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right) \dots$$

On voit que l'on obtient un terme de degré 3 de ce produit infini en multipliant  $\pi x$  par une infinité de 1 et par un facteur en  $x^2$  de ce produit :

Ce terme en  $x^3$  est  $\pi x \left(-\frac{x^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} \dots\right)$ .

Ce terme en  $x^3$  est donc  $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^3$ , c'est-à-dire  $-\zeta(2)x^3$ .

On identifie ces termes en  $x^3$  :

$$-\frac{\pi^3}{6} = -\pi\zeta(2) \text{ donc } \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$