Corrigé du CCINP TPC 2020

Exercice 1.

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -(2a+2) \end{pmatrix}$$

1. (a) $\det(M_a) = -2a^2$ et M_a inversible ssi $\det(M_a) \neq 0$ i.e. $a \neq 0$. Donc $\underline{M_a \text{ est inversible ssi } a \neq 0}$.

   (b) Si $a = 0$, on a :

$$M_a = M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   La première colonne est nulle et les deux dernières forment une famille libre donc $\underline{\mathrm{rg}(M_0) = 2}$.

2. On a :

$$M_a U = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -2U$$

   Donc U est un vecteur propre de M_a associé à la valeur propre $\lambda = -2$. Par ailleurs,

$$M_a + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -2a \end{pmatrix}$$

   On a $\mathrm{rg}(M_a + 2I_3) = 2$ (-2 est valeur propre et les deux premières lignes forment une famille libre) donc $\dim(E_{-2}) = 1$ et $U \in E_{-2}$. En conclusion, $\underline{E_{-2} = \mathrm{Vect}(U)}$.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\chi_{M_a}(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M_a) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2a^2 & (4a+a^2) & \lambda + (2a+2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 0 \\ -2\lambda - 4 & \lambda & -1 \\ 4\lambda + 8 & (4a+a^2) & \lambda + (2a+2) \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 + 4C_3 \\
&= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 4 & (4a+a^2) & \lambda + (2a+2) \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & (a+2)^2 & \lambda + (2a+2) \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \\
&= (\lambda+2)(\lambda^2 + 2a\lambda - (4a+4) + (a+2)^2) \\
&= (\lambda+2)(\lambda^2 + 2a\lambda + a^2) \\
&= \underline{(\lambda+2)(\lambda+a)^2}
\end{aligned}$$

(b) D'après le calcul précédent, $-a$ est valeur propre double de M_a.

(c) Si $a = 2$, alors $\chi_{M_a}(\lambda) = (\lambda+2)^3$, alors $\mathrm{Sp}(M_a) = \{-2\}$ donc M_a est diagonalisable ssi $M_a = -2I_3$, absurde. Donc M_a n'est pas diagonalisable.
Si $a \neq 2$, alors $\mathrm{Sp}(M_a) = \{-2, -a\}$, dans ce cas M_a est diagonalisable ssi $\dim(E_{-a}) = 2$. Or :

$$M_a + aI_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -a+2 \end{pmatrix}$$

Les deux dernières colonnes de $M_a + aI_3$ forment une famille libre donc $\mathrm{rg}(M_a + aI_3) \geq 2$ et ainsi, $\dim(E_{-a}) \leq 1$. Comme $-a$ est valeur propre, on en déduit que $\dim(E_{-a}) = 1 \neq 2$, donc M_a n'est pas diagonalisable.

4. (a) On cherche $\varepsilon_2 = (x, y, z)$ tel que $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$ i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x+1 \\ z & = & -2y-2 \\ -8x-12y-6z & = & -2z+4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z & = & -1 \\ 2x+y & = & 1 \\ 2y+z & = & -2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z & = & -1 \\ -2y-z & = & 2 \\ 2y+z & = & -2 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

On trouve finalement (en prenant $z = 0$) $\varepsilon_2 = (1, -1, 0)$.

(b) On cherche $\varepsilon_3 = (x, y, z)$ tel que $f(\varepsilon_3) = -2\varepsilon_3 + \varepsilon_2$ i.e. i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x+1 \\ z & = & -2y-1 \\ -8x-12y-6z & = & -2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z & = & 0 \\ 2x+y & = & 1 \\ 2y+z & = & -1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z & = & 0 \\ -2y-z & = & 1 \\ 2y+z & = & -1 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

On peut finalement choisir ($y = 0$) $\varepsilon_3 = (1/2, 0, -1)$. Par construction, la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est la matrice T.

5. (a) On a vu à la question 3.(a) que $\mathrm{Sp}(M_a) = \{-2, -a\}$. Dans notre cas, $a \neq 2$ donc $-a \neq -2$ et ainsi, M_a a exactement deux valeurs propres, λ $(= -2)$ et $-a$.

(b) On cherche $V = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $M_aV = -aV$ i.e. :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -a \\ z & = & -ay \\ -2a^2-(4a+a^2)y-(2a+2)z & = & -az \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -a \\ z & = & a^2 \end{array}\right.$$

Finalement, on trouve $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ a^2 \end{pmatrix}$.

(c) On cherche $W = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $M_aW = V - aW$ i.e. :

$$\begin{cases} y & = & 1 \\ z & = & -a - ay \\ -(4a + a^2)y - (2a + 2)z & = & a^2 - az \end{cases} \iff \begin{cases} y & = & 1 \\ z & = & -2a \end{cases}$$

Finalement, on trouve $\underline{W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2a \end{pmatrix}}$.

(d) On considère la base de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}'' = \{(1, -2, 4), (1, -a, a^2), (0, 1, -2a)\}$. D'après les calculs que nous venons de faire, par contruction, la matrice de f dans $\mathcal{B}''$ est T_a, ce qui signifie que $\underline{M_a \text{ est semblable à } T_a}$.

6. (a) En posant $\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$ $= M_{-3}$, on a bien $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On est dans le cas de la question 5., en remplaçant a par -3, on trouve :

$$\underline{T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}}$$

(c) On écrit : $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $DN = ND$ et $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$, donc la formule du binôme de Newton donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}}_{=0} \\ &= D^n + nND^{n-1} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Cette égalité est valable également pour $n = 0$, donc elle est vraie $\underline{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

(d) Une récurrence immédiate donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$ et $X_n = A^nX_0$ donc $\underline{X_n = PT^nP^{-1}X_0}$.

Exercice 2.

Partie I - Etude de X_2

7. Le professeur pose deux questions, il peut donc interroger un ou deux élèves d'où $\underline{X_2(\Omega) = \{1, 2\}}$.
8. L'événement $\{X_2 = 1\}$ correspond au fait d'interroger le même élève pour les deux questions posées. Formellement, on a donc :

$$\{X_2 = 1\} = \bigcup_{i=1}^{N} (Q_{i,1} \cap Q_{i,2}).$$

Les événements formant l'union sont incompatibles donc : $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(Q_{i,1} \cap Q_{i,2})$. Par ailleurs, les désignations d'élèves sont des événements indépendants donc : $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(Q_{i,1}) \mathbb{P}(Q_{i,2})$. Enfin, tous les élèves ont la même probabilité d'être choisi donc (comme il y a N élèves) : $\mathbb{P}(Q_{i,1}) = \mathbb{P}(Q_{i,1}) = 1/N$. Et finalement,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} = \frac{N}{N^2} = \underline{\frac{1}{N}}.$$

Puis $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) = \underline{\frac{N-1}{N}}$.

9. L'espérance existe puisque X_2 prend un nombre fini de valeurs et on a :

$$\underline{\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{N} + 2\frac{N-1}{N} = \frac{2N-1}{N}}.$$

Partie II - Modélisation dans le cas général

10. (a) $\underline{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ si } n < N \text{ et } X_n(\Omega) = [\![1, N]\!] \text{ si } n \geq N}$.

(b) Si $n < N$, on ne peut pas interroger plus d'élèves qu'il n'y a de questions donc $\mathbb{P}(X_n = i) = 0$ pour $i \in [\![n+1, N]\!]$.

(c) L'événement $\{X_n = 1\}$ correspond au fait d'interroger le même élève pour les n questions posées. On a :

$$\{X_n = 1\} = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcap_{k=1}^{n} Q_{i,k}.$$

A l'aide des mêmes arguments qu'à la question 8, on a donc :

$$\underline{\mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}}.$$

(d) $\{X_{n-1} = 1, \dots, X_{n-1} = N\}$ est un système complet d'événements et la formule des probabilités totales donne : pour tout $i \in [\![2, N]\!]$,

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = i)\mathbb{P}(X_{n-1} = k)$$

Par ailleurs, si k élèves sont interrogés aux $n-1$ premières questions, il peut y avoir soit k élèves interrogés aux n premières questions (on interroge à la n-ième un élève déjà interrogé), soit $k+1$ élèves interrogés aux n premières questions (on interroge un élève qui n'a pas été interrogé aux $n-1$ premières questions). Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = i) &= \sum_{k=1}^{i-2} \underbrace{\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = i)}_{=0}\mathbb{P}(X_{n-1} = k) \\ &\quad + \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i-1\}}(X_n = i)\mathbb{P}(X_{n-1} = i-1) + \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}(X_n = i)\mathbb{P}(X_{n-1} = i) \\ &\quad + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = i)}_{=0}\mathbb{P}(X_{n-1} = k) \\ &= \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i-1\}}(X_n = i)\mathbb{P}(X_{n-1} = i-1) + \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}(X_n = i)\mathbb{P}(X_{n-1} = i)\end{aligned}$$

Enfin, $\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}(X_n = i) = \dfrac{i}{N}$ (choix de l'élève parmi les i déjà interrogés) et
$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i-1\}}(X_n = i) = \dfrac{N-i+1}{N}$ (choix de l'élève parmi les $N-(i-1)$ pas interrogés).
En conclusion,

$$\underline{\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{N-i+1}{N}\mathbb{P}(X_{n-1} = i-1) + \frac{i}{N}\mathbb{P}(X_{n-1} = i)}$$

11. D'après la question précédente, on posant :

$$A_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{N-1}{N} & \frac{2}{N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{N} & 1 \end{pmatrix}$$

on a bien $U_n = A_N U_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

Partie III - Etude d'un cas particulier

12. C'est la question précédente avec $N = 5$.

13.

$$V_1 + 4V_2 + 6V_3 + 4V_4 + V_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = U_1$$

donc l'initialisation est vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'on ait l'égalité demandée, alors

$$U_{n+1} = A_5 U_n$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, après calculs, on trouve :

$$U_{n+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^n V_1 + 4\left(\frac{2}{5}\right)^n V_2 + 6\left(\frac{4}{5}\right)^n V_3 + 4\left(\frac{4}{5}\right)^n V_4 + V_5$$

C'est l'égalité au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors U_n est le vecteur donnant la loi de X_n. D'après la question précédente,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \\ \mathbb{P}(X_n = 5) \end{pmatrix} = U_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ -4\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ 6\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 12\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 6\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \\ -4\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 12\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} - 12\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 4\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 6\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - 4\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + 1 \end{pmatrix}$$

15. (a) X_n prend un nombre fini de valeurs donc elle admet une espérance.

(b) $\lambda = \frac{4}{5}\lambda + 1 \iff \underline{\lambda = 5}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$ et $\lambda = \frac{4}{5}\lambda + 1$. En faisant la différence, il vient :

$$u_{n+1} - \lambda = \frac{4}{5}\left(u_n - \lambda\right).$$

i.e. : $v_{n+1} = \frac{4}{5}v_n$ donc $\underline{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 4/5}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (u_1 - \lambda) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (1-5) = -\frac{4^n}{5^{n-1}}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u_n = v_n + \lambda = -\frac{4^n}{5^{n-1}} + 5 = \frac{5^n - 4^n}{5^{n-1}}$.

A la question 9., on a trouvé $\mathbb{E}(X_2) = \frac{2N-1}{N} = \frac{9}{5}$. Or $u_2 = \frac{9}{5}$ donc c'est bon.

(e) On a $u_n \sim \frac{5^n}{5^{n-1}} = 5$ donc $\underline{\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow 5}$, $E(X_n)$ correspond à la moyenne du nombre d'élèves interrogés lors des n premières questions. Plus le nombre de questions augmente ($n \to +\infty$), plus on va interroger d'élèves. Comme ici, il y a 5 élèves, il n'est pas surprenant qu'au bout d'un grand nombre de questions, le professeur interroge en moyenne tous les élèves.

Exercice 3.

Partie I - Etude de la convergence de la série G_1

16. $|g_k| = \dfrac{1}{2k+1} \sim \dfrac{1/2}{k}$. Or $\sum \dfrac{1/2}{k} = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{k}$ est une série divergente (série harmonique) donc par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum |g_k|$ diverge, i.e. G_1 n'est pas absolument convergente.

17. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$v_n - u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} = -\frac{1}{4n+3} \leq 0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} \\ &= -\frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5} = -\frac{2}{(4n+3)(4n+5)} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est décroissante.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)+1} \\ &= \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} = \frac{2}{(4n+5)(4n+7)} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est croissante.

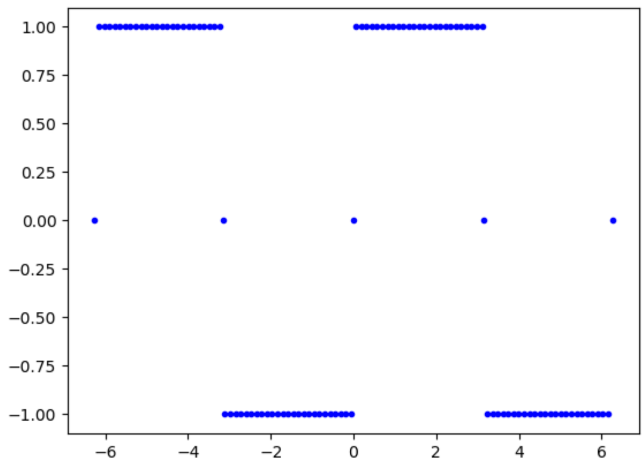
(d) La suite (u_n) est décroissante donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$. En utilisant la question 17.a), on obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_0$, i.e. (v_n) est majorée par u_0.
La suite (v_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, (v_n) converge vers une limite l_1.

(e) La suite (v_n) est croissante donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0$. En utilisant la question 17.a), on obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_0$, i.e. (u_n) est minorée par v_0.
La suite (v_n) est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite l_2.

(f) Tout d'abord, $v_n - u_n = -\dfrac{1}{2(2n+1)+1} \longrightarrow 0$ donc par unicité de la limite, on obtient $l_2 - l_1 = 0$ i.e. $\underline{l_1 = l_2}$. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent toutes les deux vers la même limite l_1. Donc (en utilisant un résultat HP en TPC), (S_n) converge vers $l_1 (= l_2)$ i.e. la série $\underline{G_1 \text{ converge et sa somme vaut } l_1(= l_2)}$.

Partie II - Etude d'une série de Fourier, calcul de la somme de G_1

18. Le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$:



19. f est impaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors comme $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est paire :

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}\right) \end{aligned}$$

La série de Fourier de la fonction f est donc la série de fonction $\underline{x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin(nx)}$

20. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge.

21. On cherche la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
D'après la question 19, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_{2n+1} = \dfrac{4}{\pi(2n+1)}$. Donc la série de Fourier est la série de fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)x)$. La fonction f est continue en $\pi/2$ donc le théorème de Dirichlet implique que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = f(\pi/2) = 1$$

Et $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Finalement, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)} = 1$ i.e.

$$\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}.$$

Partie III - Séries de Gregory pour $\alpha \in]0,1[$

22. Soit $\alpha \in]0,1[$, alors

$$|g_k| = \frac{\alpha^k}{2k+1} \leq \alpha^k$$

La série $\sum \alpha^k$ converge (série géométrique avec $|\alpha| < 1$), donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |g_k|$ converge i.e. G_α converge absolument.

23. Soit $x \in]-1,1[$, alors $-x^2 \in]-1,1[$ et :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

24. D'après le théorème d'intégration terme à terme, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n} dt \underset{TITT}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

La série obtenue est de rayon de convergence 1 (utiliser par exemple la règle de d'Alembert).

25. On obtient donc $\underline{G(\alpha) = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}}$

FIN